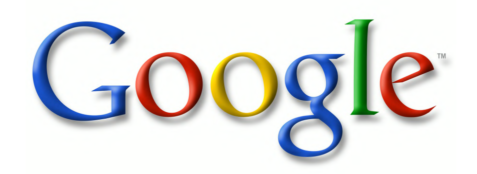
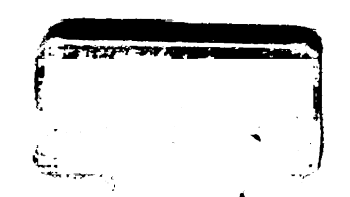



621.305
AR
v. 11



Archiv
für
Elektrotechnik

Unter Beteiligung des Verbandes
Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins

herausgegeben

von

Professor Dr.-Ing. W. Rogowski
Aachen

XI. Band

Mit zahlreichen Textfiguren



Berlin
Verlag von Julius Springer
1922

Inhaltsverzeichnis.

Archiv für Elektrotechnik

XI. Band. 1. Heft. 1922.

Uber die elektrische Festigkeit der Luft.[1]

Von

W. O. Schumann.

Unter der elektrischen Festigkeit der Luft sei im Folgenden die elektrostatisch berechnete Feldstärke verstanden, die der Anfangsspannung[2]) zwischen zwei Elektroden entspricht. Aus einer großen Reihe experimenteller Untersuchungen ist bekannt, daß diese Durchbruchfeldstärke von der Elektrodenanordnung abhängt. Die Absicht der experimentellen Arbeit war, diese Abhängigkeit für ebene und zylindrische Funkenstrecken bis zu möglichst großen Schlagweiten bzw. Zylinderradien zu verfolgen und namentlich festzustellen, ob sich bei großen Werten beider die Durchbruchfeldstärke einer Konstanten nähere oder nicht.

I. Ebene Elektroden.

Zur Verfügung stand ein Hochspannungstransformator der S. S. W., Type Th 200/500, 200 kVA, 50 Perioden sek^{-1}, 500/500000 Volt, der einpolig geerdet bis 250 kV benützt werden konnte. Der Nullpunkt des Transformators konnte geerdet werden und sämtliche Versuche mit isolierten Polen wurden mit geerdeter Mitte ausgeführt. Zur Speisung des Transformators diente ein Gleichstrom-Wechselstromaggregat von einer Leistung von 40 kW. Wegen der großen Leistüngen konnte nicht von einer Batterie gearbeitet, sondern mußte an das städtische Netz angeschlossen werden, dessen häufige Spannungsschwankungen das Arbeiten ziemlich erschwerten. Ein Pol der Niederspannungswicklung war dauernd geerdet.

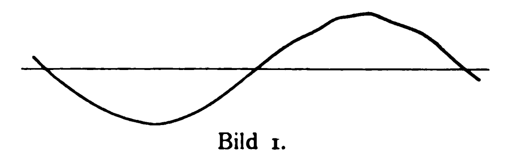


Bild 1.

Da die Leistung des Transformators im Vergleich mit der des Antriebsaggregats erheblich war, mußte mit starken Rückwirkungserscheinungen gerechnet werden, die sich bei der einphasig belasteten Maschine in einer starken Änderung der Form der Spannungskurve bemerkbar machten. Dies um so mehr, als die Regulierung der Spannung durch den Erregerstrom der Wechselstrommaschine geschah, und der Transformator mit den großen Windungszahlen sekundär starke kapazitive Effekte zeigte.

Vor Beginn der Messungen wurde deshalb mit einer Reihe von Oszillogrammen die Änderung der Kurvenform studiert.

---

[1]) Die vorliegende Abhandlung berichtet über den experimentellen Teil einer größeren Untersuchung, die im Laufe des nächsten Jahres in Buchform erscheint.

Die experimentellen Untersuchungen wurden in den Jahren 1919/20 im Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Stuttgart durchgeführt. Herrn Prof. Dr. F. Emde, der mir die Durchführung ermöglichte, möchte ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen. Die materiellen Hilfsmittel gewährte die Bosch-Stiftung an der Technischen Hochschule Stuttgart, der ich dafür zu großem Dank verpflichtet bin.

[2]) s. M. Töpler Annalen der Physik (4) 7, 477, 1902; (4) 10, 730, 1903; (4) 19, 191, 1906; (4) 22, 119, 1907; ETZ. 28, 998, 1907. W. Weicker, Diss. Dresden 1910; ETZ. 1911, S. 436

Bild 1 zeigt das Oszillogramm der auf volle Spannung (507 Volt) erregten leerlaufenden Maschine. Abgesehen von einigen Zahnzacken ist die Kurve gut sinusförmig.

Bild 2—5 stellen Strom und Spannung der Niederspannungsseite des leerlaufenden Transformators dar (bei dem kein Teil geerdet ist). Die Spannungs-Kurve wird um so spitzer, je höher die Spannung ist, entsprechend steigt der Scheitelfaktor.

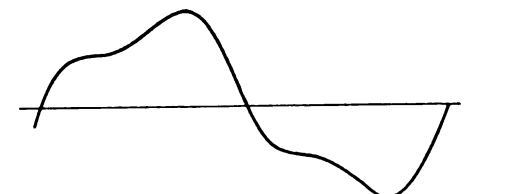


Bild 2. 50 kV. Hochspannung nichts geerdet.

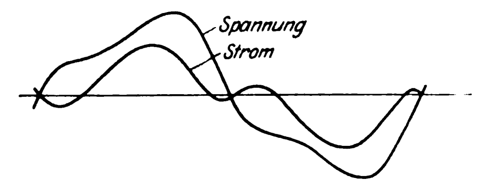


Bild 3. 150 kV. 11 A. Hochspannung nichts geerdet.

Bei 500 kV betrug der Leerverbrauch des Transformators etwa 11 kW. Der Strom ist außerordentlich verzerrt und annähernd in Phase mit der Spannung, soweit man noch von Phase sprechen kann. Es ist eine starke Kapazitätswirkung vorhanden, aber der Transformator wirkt noch spannungserniedrigend auf die Maschine. In Bild 5 z. B. betrug die Maschinenspannung bei angeschaltetem Transformator 489 Volt und stieg nach Abschalten des Transformators auf 507 Volt.

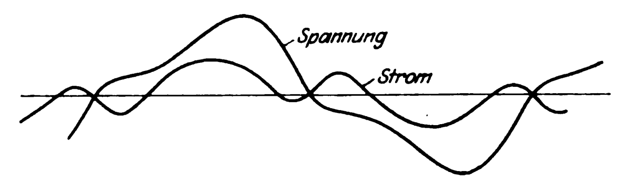


Bild 4. 400 kV. 22 A. Hochspannung nichts geerdet.

Bild 6 und 7 zeigen Strom und Spannung des leerlaufenden Transformators, wenn ein Pol geerdet ist. Die Spannungsform ist eine abgeflachte Sinuswelle, der Strom eilt der Spannung vor -- der Transformator wirkt als Kapazität. Dabei ist die Stromaufnahme bedeutend größer als im vorigen Fall. Damals bei 490 kV ca. 27 A, jetzt schon bei 240 kV ca. 38 A. Hand in Hand damit geht eine starke Hinaufmagnetisierung der Maschine. Bei Bild 6 z. B. fiel die Maschinenspannung

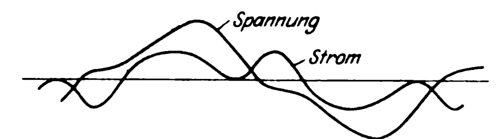


Bild 5. 490 kV. 27 A. Hochspannung nichts geerdet.

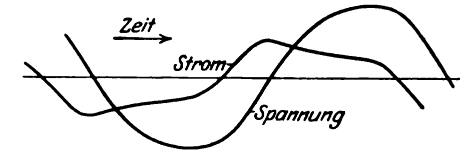


Bild 6. 144 kV. 22 A. Transformator Leerlauf. Ein Pol geerdet.

von 144 Volt beim Abschalten auf 114 Volt, bei Bild 7 von 240 Volt auf 159 Volt. Die Änderung der Spannungsform mit der Größe der Spannung ist wesentlich geringer als früher.

Dieses Hinaufmagnetisieren der Maschine durch den Transformator erwies sich bei den Versuchen mit geerdetem Pol sehr angenehm, indem stets nur prasselnde Funkenüberschläge eintraten und ein kleines Nachlassen der Spannung genügte, um die Entladung zum Schweigen zu bringen. Bei den Versuchen mit isolierten Polen dagegen trat stets sofort ein Lichtbogen auf, der bei seinem Erlöschen mit einem Funken endigte.

Das Bild 8 zeigt die Änderungen der Spannungsform, wenn die Mitte des Transformators geerdet ist, also in der Schaltung, die bei den Messungen mit isolierten Polen benützt wurde. Die Änderung ist noch weit stärker als in den Bildern 2—5, vermutlich deshalb, weil zwischen den beiden geerdeten Punkten der Hoch- und der Niederspannungswicklung ein lebhafter Ladestrom pulsierte. Schließlich zeigt das

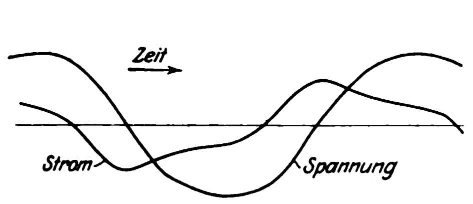


Bild 7. 240 kV. 38 A. Transformator. Leerlauf. Ein Pol geerdet.

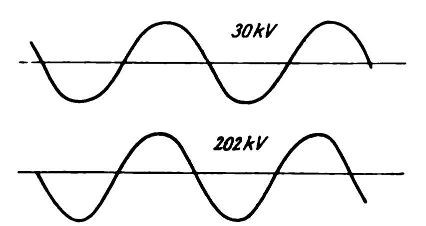
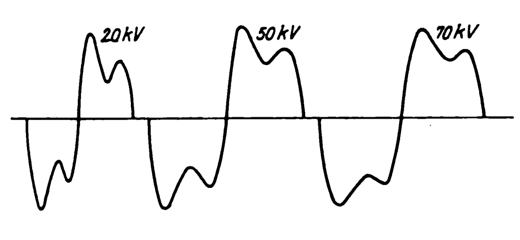
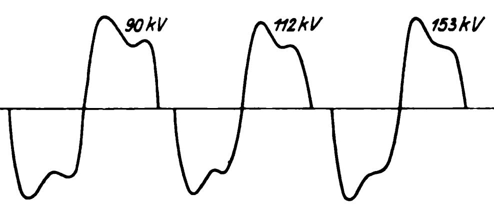
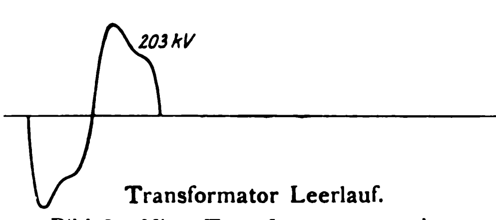


Bild 9. Transformator mit zylindrischer Funkenstrecke. Ein Pol geerdet. Beide Kurven dicht vor Überschlag.







Transformator Leerlauf.
Bild 8. Mitte Transformator geerdet.

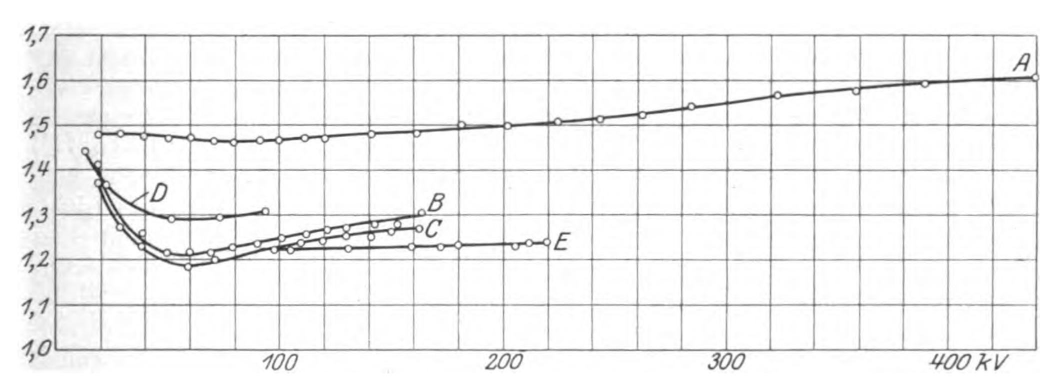


Bild 10. Scheitelfaktor des Transformators mit geerdeter Mitte abhängig von der Spannung.
A Transformator leerlaufend.
B Blechschale und 15 cm ⌀ Zylinder angeschlossen.
C " " 30 " " " "
D " " 2,5 " " " "
E Zwei große Bleche angeschlossen.

Bild 9 die Spannungskurve des Transformators mit einem geerdeten Pole, bei angeschlossener Zylinderfunkenstrecke dicht vor dem Überschlag. Es ist kein wesentlicher Unterschied gegen die Bilder 6 und 7 zu konstatieren.

Es war also von vornherein mit einer ziemlich starken Variation des Scheitelfaktors zu rechnen, und die aufgenommenen Probekurven bestätigten diese Vermutung. Bild 10 zeigt den Scheitelfaktor des Transformators mit isolierten Polen

und geerdeter Mitte, Bild 11 des Transformators mit einem geerdeten Pol. Im ersten Falle treten sehr große Veränderungen auf, während sie im zweiten Falle bedeutend geringer sind. Bei Leerlauf ist der Scheitelfaktor des Transformators mit isolierten Polen erheblich größer als der des Transformators mit einem geerdeten Pol. Er nimmt nach Durchschreiten eines Minimums mit wachsender Spannung zu, während er im zweiten Falle wesentlich konstant bleibt. Bei kapazitiver Belastung kehrt sich aber das Verhältnis um. Der Scheitelfaktor des Transformators mit isolierten Klemmen wird kleiner als der des geerdeten Transformators, um so mehr, je größer die angeschlossene Kapazität ist, und wird zudem im Bereich kleiner Spannung sehr von dieser abhängig. Der Scheitelfaktor des einpolig geerdeten Transformators nimmt mit der Kapazität der angeschlossenen Versuchsanordnung etwas zu, aber nur wenig, und bleibt von der Spannung selbst ziemlich unabhängig. Die Wirkung der Eigenkapazität des Transformators ist schon für sich zu stark, als daß die Kapazität der Versuchsanordnung viel ausmachen könnte.

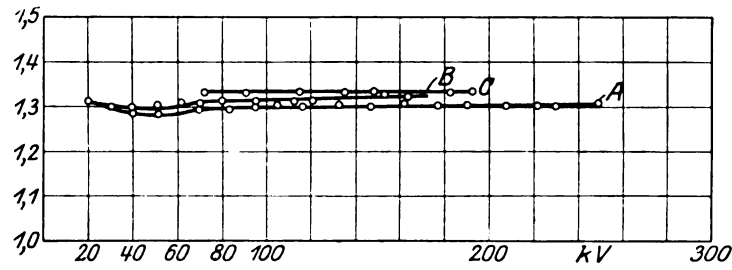


Bild 11. Scheitelfaktor des Transformators mit einem geerdeten Pole abhängig von der Spannung.
A Transformator leerlaufend.
B Blechschale und 15 cm ⌀ Zylinder angeschlossen.
C Zwei große Bleche angeschlossen.

Wegen dieser starken Veränderung des Scheitelfaktors und weil damit zu rechnen war, daß die Umdrehungszahl der Antriebsmaschine infolge der Netzschwankungen auch nicht konstant bleiben würde, wurde der Scheitelfaktor bei jeder Überschlagsmessung bestimmt, und zwar als Mittel dreier Werte, die unmittelbar unterhalb der Überschlagsspannung und unmittelbar nach der Überschlagsmessung festgelegt wurden. Als Messungsmethode wurde eine ähnliche wie die von Estorff[1]) s. Z. vorgeschlagene gewählt, indem der Lichtfleck des Oszillographen auf eine ruhende Skala fiel. Durch die Vorschaltwiderstände wurde die Breite des Lichtbandes nacheinander auf drei aufgezeichnete Marken eingestellt und unmittelbar nachher auf dieselben Marken die Gleichstromablenkung einreguliert. In allen sechs Messungen, die sehr rasch hintereinander vonstatten gingen, wurde die Oszillographenstromstärke mit einem Präzisionsamperemeter von S. und H. für Wechselstrom und Gleichstrom mit einem Meßbereich von 0,1 A. abgelesen, das mit einem Normalinstrument des Instituts verglichen und nahezu fehlerfrei gefunden wurde. Das Verhältnis der beiden Stromwerte ergab direkt den Scheitelfaktor. Die drei erhaltenen Werte stimmten meistens innerhalb 1 % miteinander überein. War das nicht der Fall, so wurden Überschlags- und Oszillographenmessung wiederholt.

Die Schleife des Oszillographen mußte dabei auf eine größere Empfindlichkeit als die übliche eingestellt werden. Durch Vorversuch wurde festgestellt, daß dadurch die Proportionalität zwischen Strom und Ausschlag in dem in Frage kommenden Gebiet erhalten blieb und keine Verzeichnungen der Kurven eintraten.

Zur Spannungsmessung stand ein Präzisionsvoltmeter für Wechselstrom von S. und H. mit einem Meßbereich von 300 Volt zur Verfügung, mit dem die Niederspannung des Transformators bestimmt wurde, das zu Beginn, am Ende und während

[1]) W. Estorff, Dissertation, Berlin, 1915. ETZ., 1916, S. 60.

der Messungen mit einem Normalinstrument des Instituts verglichen wurde. Dieses seinerseits wurde durch Auskompensierung mit einem Westonelement kontrolliert. Die Änderung der Korrekturen während der Versuche war äußerst gering. Zur direkten Messung der Hochspannung war noch ein Hochspannungsvoltmeter in Öl von S. und H. bis 120 kV vorhanden.

Durch vorläufige Messungen wurde festgestellt, daß das Übersetzungsverhältnis 1000 für den Transformator mit isolierten Polen genau stimmte und auch durch angehängte Schaltungen nicht verändert wurde. Bei Erdung eines Poles stieg es im Mittel um 2% und war ebenfalls von der angeschlossenen Apparatur so gut wie unabhängig.

Zur Messung kleiner Niederspannungen wurde ein Präzisionsvoltmeter von S. und H. mit einem Meßbereich bis 30 Volt benützt, das durch Vorschaltung von Präzisionswiderständen auf 60 Volt gebracht wurde. Auch dieses Voltmeter wurde mehrfach geeicht.

Zur Ionisierung diente eine große frei brennende Bogenlampe von ca. 15 A., die sich etwa 1 1/2 m von der Funkenstrecke entfernt befand.

Die Messungen selbst wurden sowohl mit geerdeter Transformatormitte als auch mit Erdung eines Poles vorgenommen. Die Messungen mit geerdeter Mitte dienten im wesentlichen zur Kontrolle. Im Bereich kleiner Spannungen wurden sie wegen der großen Veränderlichkeit des Scheitelfaktors nur mit Vorsicht benützt. Die Übereinstimmung der nach beiden Methoden gewonnenen Werte war eine befriedigende, soweit dies der Fall sein mußte. So betrugen z. B. in dem noch zu besprechenden Versuch mit den beiden Blechen, wo die Scheitelfaktoren bis zu 10% voneinander abwichen, die Abweichungen der Resultate weniger als 1%.

Die Spannungsregulierung geschah durch Widerstände im Erregerkreis der Wechselstrommaschine in der Art, daß die Spannung bis kurz unterhalb der kritischen rasch eingestellt wurde und dann sehr langsam gesteigert wurde. Jeder Stoß in diesem Gebiet war peinlichst zu vermeiden, denn es traten sonst schon bei geringeren Spannungen Überschläge ein. Die Schwankungen der städtischen Spannung machten sich da häufig unangenehm bemerkbar; ab und zu konnten indes langsame Spannungsänderungen vorteilhaft ausgenützt werden.

Bei den Versuchen mit geerdeter Transformatormitte wurde wegen des Lichtbogens zwischen zwei aufeinanderfolgenden Versuchen eine Art Ruhezeit eingeschaltet, damit die Elektroden sich abkühlen und die Luft in ihren früheren Zustand zurückkehren konnte. Es ergaben sich andernfalls ebenfalls zu geringe Überschlagswerte. Die Elektroden mußten in diesem Falle häufig gereinigt werden.

Jede einzelne Überschlagsmessung bestand aus ca. sechs Beobachtungen der Funkenspannung, von denen ca. die Hälfte vor, die andere nach der dazwischen geschalteten oszillographischen Messung ausgeführt wurde. Die einzelnen Werte stimmten gut überein, wenn die Spannung genügend langsam gesteigert worden war. Ab und zu konnte festgestellt werden, daß der erste Überschlagswert etwas tiefer (bis 2—3%) als die folgenden lag. Die Unterschiede betrugen meist weniger wie 1/2%. Herausfallende Punkte waren fast immer durch Unsauberkeit der Elektroden verursacht und zu beseitigen.

Eine größere Zahl von Versuchsreihen wurde wiederholt, namentlich hinsichtlich der Temperatur und Druckkorrektion, da ein Teil der Versuche im kohlenlosen Januar 1920 bei verhältnismäßig geringer Temperatur ausgeführt werden mußte. Die Abweichungen waren unbedeutend.

Die Genauigkeit der Resultate schätze ich auf $\pm (1 \div 1{,}5)$%.

Als Versuchsobjekte wurden verwendet: 1. Zwei flache Zinkschalen mit den Durchmessern von 52 und 60 cm, die an den Rändern sanft abgerundet waren.



Die eine Schale war ganz flach kugelig gedrückt; die Überhöhung in der Mitte gegenüber dem Rande betrug ca. 3 mm.

2. Zwei gebogene Bleche von der Form des Bildes 12. Die Ränder A B und C D waren durch einen umbörtelten starken Eisenstab versteift. Die beiden Bleche wurden mit ihren Hauptachsen um 90° versetzt einander gegenübergebracht. Die Montierung der Elektroden geschah in der Weise, daß die eine auf einen isolierten Bock gesetzt wurde, während die andere an der Decke aufgehängt wurde[1]). Zur Abstandsmessung wurde ein Kathetometer verwendet, das die Abstände bei richtiger Beleuchtung auf ca. 1/8 mm genau abzulesen gestattete. Die Abstandsmessung geschah stets unmittelbar unterhalb der Funkenspannung. Die Einstellung der Elektroden geschah mit der Wasserwage.

Mit den Zinkschalen kam ich bis auf ca. 7 cm Abstand. Darüber hinaus traten Entladungen an den Rändern ein. Unterhalb setzte der Funke stets exakt innerhalb eines kleinen Kreises um den Mittelpunkt der Schalen ein.

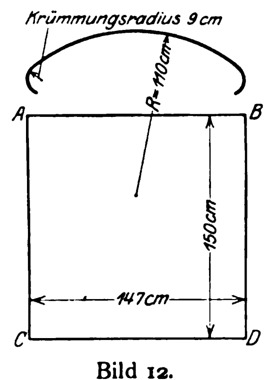


Bild 12.

Die Zinkschalen wurden häufig gereinigt. Auf der unteren Schale setzte sich nach längerer Benützung ein äußerst feines metallisch aussehendes Pulver ab.

Die gebogenen Bleche wurden nicht speziell für die Versuche angefertigt, sondern befinden sich seit längerer Zeit im Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule in Stuttgart. Wenn sie auch vor Ausführung der Versuche einer sorgfältigen Behandlung mit verdünnter Salzsäure, Fett und Benzin unterworfen wurden, so gelang es doch nicht, alle Rostnarben usf. völlig zu entfernen. Elektrisch äußerte sich dies darin, daß einwandfreie Messungen nur oberhalb einer gewissen Entfernung ausgeführt werden konnten. Bei kleinen Abständen, unterhalb von 7 cm, ergaben sich zu kleine Werte der Feldstärke, und bei ca. 3 cm Abstand traten unstabile Verhältnisse ein; die erhaltenen Werte schwankten hier stark, es war vor der Entladung ein zischendes Geräusch zu hören etc. Bei größeren Abständen jedoch waren einwandfreie, gut reproduzierbare Messungen zu machen, die sich vollkommen an die Messungen mit den Zinkschalen anschlossen und in ihrem Verlauf eine vollkommen stetige Fortsetzung der Kurve der Schalenmessungen bildeten. Mit den Blechen wurden Abstände bis zu 10,5 cm erreicht. Darüber hinaus traten Randüberschläge ein.

Bezüglich des Einflusses der Ionisierung wurden analoge Beobachtungen gemacht, wie sie Weicker[2]) anführt. Die Herabsetzung der Funkenspannung betrug bei größeren Abständen für die Zinkschalen (ca. 7 cm) ca. 1 % und wuchs mit abnehmender Funkenlänge bis etwa 3 % bei 1,5 cm Funkenlänge. Dagegen war bei Belichtung ein deutlich regelmäßigeres Einsetzen der Entladungen zu konstatieren. Bei den Versuchen mit den Zylindern war dieser letzte Umstand nicht so auffällig. Schließlich wäre noch zu erwähnen, daß bei kleinen Abständen (1,5—2 cm) der Schalen gemäß dem Löschfunkenprinzip auch bei geerdeter Mitte des Transformators kein Lichtbogen, sondern ein prasselnder Funkenstrom entstand.

Bei den gebogenen Blechen war ein Einfluß der Ionisierung kaum zu konstatieren, vermutlich weil die kleinen Rostnarben usf. kurz vor dem Überschlag selbst genügend Ionen lieferten.

---

[1]) Das ganze zu der vorliegenden Untersuchung benötigte Isoliermaterial (Hängeisolatoren, Stützisolatoren etc.) wurde in vorzüglicher Beschaffenheit von der Porzellanfabrik Hermsdorf S. A. in zuvorkommendster Weise zur Verfügung gestellt. Ich möchte auch an dieser Stelle der Firma den verbindlichsten Dank für ihr freundliches Entgegenkommen aussprechen.

[2]) W. Weicker, Dissertation. Berlin 1910, S. 39. ETZ., 1911, S. 436.

Die aus den zuverlässigsten Messungen durch Mittelung erhaltenen Resultate sind in folgender Tabelle zusammengestellt:

Elektrische Festigkeit der Luft für ebene Elektroden für 760 mm und 20° C:		Elektrische Festigkeit der Luft für ebene Elektroden für 760 mm und 20° C:	
Funkenlänge cm	Luftfestigkeit $\frac{kV}{cm}$	Funkenlänge cm	Luftfestigkeit $\frac{kV}{cm}$
1	31,7	6	27,6
2	29,8	7	27,2
3	29,05	8	26,9
4	28,5	9	26,6
5	28,05	10	26,4
		10,8	26,2

wobei die mittlere Genauigkeit etwa ± (1÷1,5)% beträgt. Nur bei den beiden ersten Werten ist sie infolge der Ungenauigkeiten der Abstandsmessung geringer und beträgt etwa ± 2,5 %.

In Bild 13 sind diese Werte und ein Teil der Meßpunkte dargestellt.



Bild 13. Durchbruchfeldstärke ebener Elektroden abhängig vom Abstand. 760 mm Hg. 20° C.

Bild 14 zeigt die Werte nochmals in größerem Maßstabe. Zugleich sind C. Müllers[1]) Resultate und die von Villard und Abraham[2]) (beide mit Gleich-

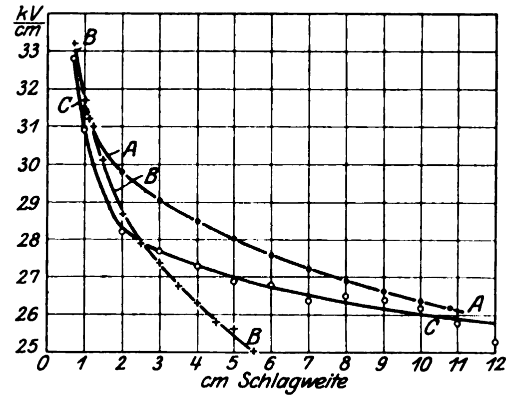


Bild 14. Durchbruchsfeldstärke ebener Elektroden abhängig von der Schlagweite.
760 mm Hg 20° C.
Kurve AA (·) Schumann.
„ BB (+) C Müller.
„ CC (o) Villard und Abraham.

[1]) C. Müller, Annalen der Physik (4) 28, 585, 1909.
[2]) P. Villard und H. Abraham, Comptes Rendus, 153, 1911, II, 1200.

spannung) eingetragen. Alle Kurven zeigen zunächst ein dauerndes regelmäßiges Abnehmen der Durchbruchfestigkeit mit steigender Schlagweite, so daß bis zu Schlagweiten von 11 cm jedenfalls nicht von einem konstanten Grenzwert gesprochen werden kann, dem die Feldstärke zustrebt. Die Kurve Müllers nimmt etwa den gleichen Ausgangspunkt für kleine Abstände wie meine, fällt jedoch für größere Abstände bedeutend rascher ab. Die Verzögerung kann diesen Unterschied nicht bewirkt haben, denn für kleine Abstände fallen meine Werte z. T. mit den Müllerschen zusammen, z. T. liegen sie noch darunter und auch die Messung des Scheitelfaktors, des Abstandes oder der Spannung kann nicht der Grund sein, denn sonst wären die Meßpunkte für geerdete Transformatormitte und geerdete Transformatorklemme nicht so gut zusammengefallen und hätten die Messungen mit den großen Blechen nicht so guten Anschluß an die Messungen mit den Schalen gezeigt. Es ist hingegen möglich, daß Müllers Schalen (22 cm Durchmesser mit einer vorspringenden Erhöhung in der Mitte) bei den größeren Abständen kein homogenes Feld mehr gaben und daß ein Influenzeinfluß vorliegt, wie ihn schon M. Toepler[1]) vermutet hat. Die Messungen von Villard und Abraham liegen am Anfang und Ende des Meßgebiets ziemlich nahe den meinigen, dazwischen weichen sie erheblich ab. Daß sie für kleine Schlagweiten tiefer liegen, als die sehr präzisen Müllerschen Messungen, spricht nicht für ihre Genauigkeit. Da meine Messungen für kleine Abstände verhältnismäßig ungenau sind, nehme ich den Müllerschen Wert von $31{,}7 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$ bei 1 cm Schlagweite, 760 mm und 20° C als den richtigen an.

Mittlere Kurve der elektrischen Durchbruchfestigkeit für ebene Elektroden.

Bild 15 zeigt, über einer logarithmischen Abstandsskala aufgetragen, sämtliche bisherigen Messungen mit ebenen bzw. nahezu ebenen Elektroden, auf 760 mm und 20° C reduziert, soweit Angaben über Temperatur und Druck vorhanden waren. Sie stammen fast durchwegs aus der physikalischen Literatur und sind alle mit Gleichspannung ausgeführt. Es sind eingetragen:

1. Lord Kelvin (W. Thomson). Proc. Roy. Soc. London X. 1860. 0,009—0,13 cm. Eine Elektrode eben, die andere schwach konvex. Erste Messung der Durchbruchfeldstärke. Werte zu gering, da dauernder Funkenübergang und daher Temperaturerhöhung.

2. J. B. Baille. Ann. chim. et phys. (5) 25, 486, 1882. 0,0015—1,0 cm. Platte gegen Kugelkalotte (18 cm Durchmesser). Nicht bestrahlt, alle 5 Sekunden ein Funke, ca. 760 mm Druck, 15—20° C (Werte z. T. von Heydweiller[2]) wegen der Krümmung korrigiert.) Werte von 0,7 bis 1,0 cm von Baille als nicht einwandfrei angegeben.

3. Warren de la Rue und H. Müller. Proc. Roy. Soc. London 36. Dez. 1883—1884. Phil. Trans. 171, 83, 1880. 0,02—0,5 cm. Ebene Elektroden, sehr schwach konvex. Druck und Temperatur nicht angegeben.

4. G. A. Liebig. Phil. Mag. (5) 24, 106, 1887. Sehr sorgfältige Versuche (s. Orgler[3]), wenn auch ohne Bestrahlung. 0,007—1,1 cm. Kugelsegmentelektroden. Krümmungsradius 9,76 cm. Durchmesser 4,83 cm. 18—20° C, „normaler" Druck. Werte wegen der Krümmung korrigiert.

5. J. Freyberg. Ann. d. Phys. 38, 231, 1889. 0,1—1,0 cm. Kreisförmige Platten von 10 cm Durchmesser, Wulste an den Rändern. Spannungsmessung nur auf ca. 5% genau. Druck nicht angegeben, Temperatur in einem Raume, der recht gleichmäßig warm war.

[1]) M. Toepler, Annalen der Physik, 29, 153, 1909.
[2]) A. Heydweiller, Annalen der Physik, 40, 464, 1890.
[3]) A. Orgler, Annalen der Physik (4) 1, 159, 1900.

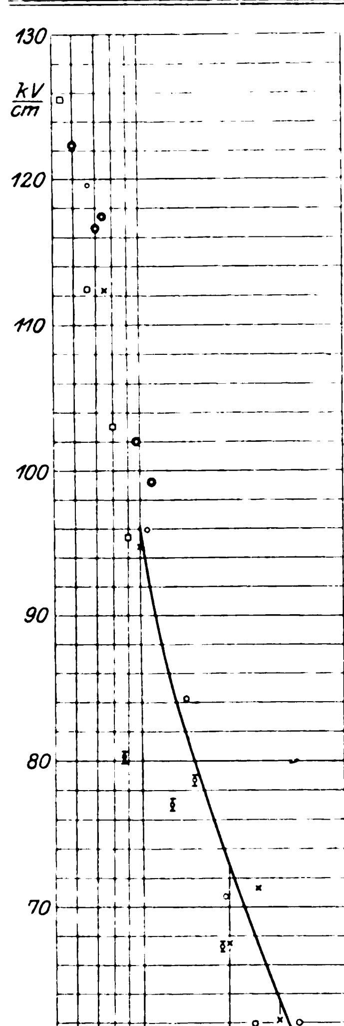


6. C. Müller, Ann. d. Phys. (4) 28, 585, 1909. 0,3—5,5 cm. Elektroden Schalen von 22 cm Durchmesser mit weichen Abrundungen. In der Mitte kleine Kugelkalotten von 3 cm Durchmesser, 1,5 mm Höhe und 150 mm Krümmungsradius. Äußerst sorgfältige Messung mit Berücksichtigung aller Nebenumstände. Leider scheinen die Werte bei größeren Abständen durch Influenzwirkungen des Gestells gefälscht zu sein. (s. M. Toepler, E. Hupka[1]). Bestrahlt mit $RaBr_2$, Bogenlicht und Röntgenstrahlen. 745 mm. 18° C.

7. R. F. Earhart, Phil. Mag. (6) 1. 147. 1901. 5. 10^{-4} — 10^{-2} cm. Kugel von 2,54 cm Durchmesser gegen eine ebene Platte. Temperatur nicht angegeben. 760 mm Hg Druck.

8. E. Meyer, Ann. d. Phys. (4) 58, 297, 1919. Die Messungen sind bei geringen Drucken durchgeführt und nach dem Paschenschen Gesetz auf normalen Druck umgerechnet. 21° C. 0,009—0,001 cm. Die Messungen sind mit gut getrockneter Luft durchgeführt. Bei normaler Feuchtigkeit, auf die sich die anderen Messungen beziehen, wären die Werte etwas höher.

[1]) M. Toepler, Annalen der Physik, 29, 153, 1909. E. Hupka, Annalen der Physik (4). 36, 440. 1911.



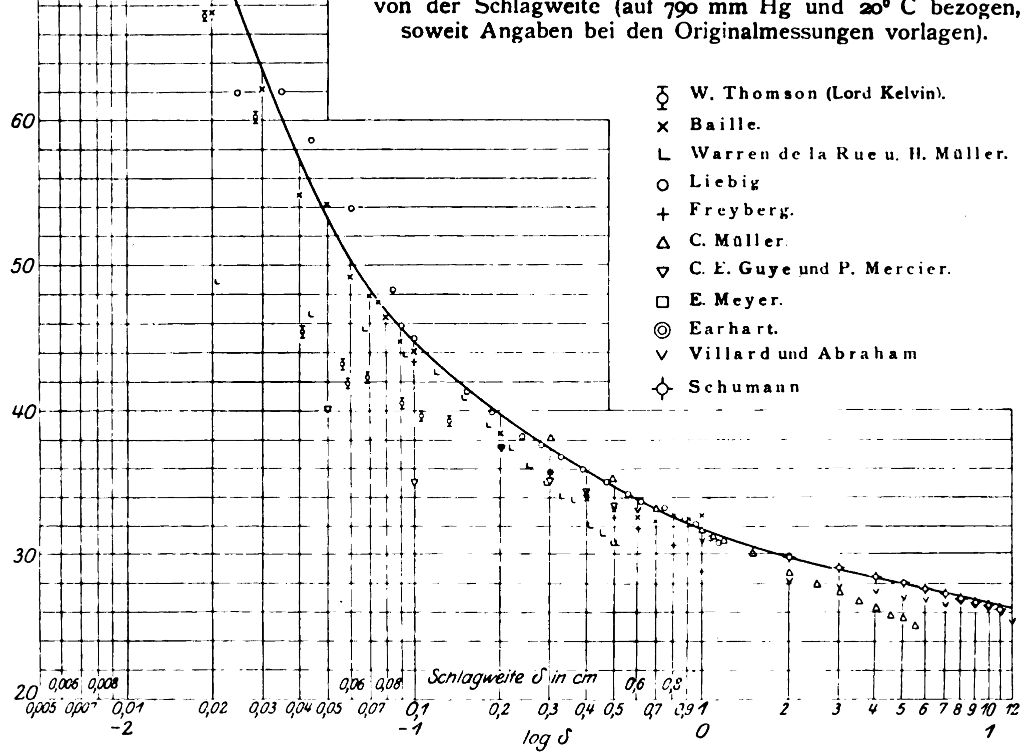


Bild 15. Durchbruchfeldstärke ebener Elektroden abhängig von der Schlagweite (auf 790 mm Hg und 20° C bezogen, soweit Angaben bei den Originalmessungen vorlagen).

9. P. Villard und H. Abraham. Comptes R. 153. 1200, 1911. II. 0,6—12 cm. Flach gewölbte Schalen von 80 cm Durchmesser. Temperatur 15°. Druck 760 mm.

10. C. E. Guye und P. Mercier. Arch. des Sc. phys. et nat. (5) 2. Jan., März 1920. 0,05—0,5 cm. Ebene Elektroden, 4,5 cm Durchmesser. 760 mm. 19° C. Mit Hg-Lampe bestrahlt. Werte ohne Bestrahlung höher. Beim kleinsten Abstand 7%, beim größten 0,2%.

Die Messungen von Macfarlane, Phil. Mag. (5) 10, 389, 1880, kommen wegen störender Influenz und die von C. Baur, ETZ. 1904, S. 7, aus Genauigkeitsgründen nicht in Frage.

Auch aus dem Bilde 15 ersieht man, daß die Abnahme der Durchbruchfeldstärke mit wachsender Schlagweite, die bei kleinen Abständen so ausgeprägt ist, auch bei großen keineswegs aufhört, sondern sich stetig fortsetzt. Legt man durch die Punkte eine Kurve, die sich möglichst den zuverlässigsten Messungen anpaßt, so ergibt sich für Durchbruchfeldstärke und Durchbruchspannung folgende Tabelle, deren Werte auf 1—2% genau anzusehen sind (für 760 mm Hg und 20° C).

Schlagweite δ cm	Durchbruchfeldstärke $\mathfrak{E}_0$ $\frac{kV}{cm}$	Durchbruchspannung U_0 (bei Wechselspannung maximale Spannung) kV
0,01	95,6	0,956
0,02	73,0	1,46
0,03	62,6	1,88
0,04	56,9	2,28
0,05	52,9	2,65
0,06	50,0	3,00
0,07	48,3	3,38
0,08	46,8	3,74
0,09	45,7	4,11
0,10	44,7	4,47

δ	$\mathfrak{E}_0$	U_0	δ	$\mathfrak{E}_0$	U_0
0,10	44,7	4,47	1	31,7	31,7
0,20	39,8	7,96	2	29,8	59,6
0,30	37,5	11,3	3	29,0	87,0
0,40	35,9	14,4	4	28,5	114
0,50	34,7	17,4	5	28,0	140
0,60	33,9	20,3	6	27,7	166
0,70	33,2	23,2	7	27,4	192
0,80	32,6	26,1	8	27,1	217
0,90	32,1	28,9	9	26,8	242
1,00	31,7	31,7	10	26,6	266
			11	26,4	290

II. Zylindrische Elektroden.

A. Sich umhüllende Zylinder.

Es wurden zwei Außenzylinder verwendet: 1) Mittlerer Durchmesser 60,5 cm, Länge 120 cm. 2) Mittlerer Durchmesser 35 cm, Länge 78 cm. Beide Zylinder



wurden aus dekapiertem 1,75 mm starkem Eisenblech autogen geschweißt und innen verzinnt [1]). Die Schweißnaht war sehr sorgfältig handüberarbeitet. An den Enden war das Blech mit sanfter Abrundung nach außen umgebörtelt. Beide Zylinder waren mit einem starken herumgelegten Eisenring verspannt. Die maximale Abweichung der Durchmesser in der Mitte von dem mittleren betrug bei dem größeren Zylinder weniger wie 1%. Wegen der Umbörtelung an den beiden Enden war der mittlere Durchmesser in der Mitte um ca. 1% größer als an den Endwulsten. Störende Wirkungen hiervon traten nur bei den allergrößten Exzentrizitäten auf, wo sich die Zylinder auf 1 cm und mehr näherten. Bei dem kleineren Zylinder bewegten sich diese Abweichungen innerhalb von ½%. Als Innenelektroden wurden 6 Rohre benützt:

1) Ein Zylinder aus verzinntem Eisenblech, hergestellt wie oben erwähnt, von mittlerem Durchmesser 31,95 cm und der Länge 200 cm. Nach den beiden Enden zu nahm der mittlere Durchmesser etwas ab, ca. ¾%. Die maximale Abweichung der Durchmesser in der Mitte vom mittleren betrug ± 1,5%.

2) 5 Kupferzylinder, hochglanzpoliert [2]), die sehr exakt gearbeitet waren.

a)	Mittlerer Durchmesser	24,80 cm,	Länge	243 cm,
b)	„ „	15,38 cm,	„	175 cm,
c)	„ „	10,405 cm,	„	245 cm,
d)	„ „	4,82 cm,	„	248 cm,
e)	„ „	2,305 cm,	„	249 cm.

Die Abweichungen dieser Zylinder von den Mittelwerten waren außerordentlich gering. Diese Zylinder waren an den Enden ebenfalls nach innen umgebörtelt bzw. sie besaßen eingelötete verzinnte Eisenkappen.

Die Messungen mit diesen Zylindern wurden in zwei Anordnungen durchgeführt: zuerst wurden die Außenzylinder senkrecht gestellt und die Innenzylinder an Hängeisolatoren hineingehängt und am oberen und unteren Ende mit Seidenschnüren starr an den Wänden befestigt, später wurden die Außenzylinder horizontal auf zwei Holzböcke und die Innenzylinder auf zwei Stützen aus Porzellan gelegt, deren Höhe verändert werden konnte. Die Einstellung konnte mit Senkel und Wasserwage sehr genau erfolgen. Durch einen entsprechend angeordneten Spiegel konnte der Überschlag immer bequem beobachtet werden. Die Abstandsmessung geschah mit Hohlzirkel und Maßstab, und es wurden immer die auf die Längenmitte bezüglichen Werte der Rechnung zugrunde gelegt.

Die Messungen in der senkrechten Anordnung erfolgten, um den Einfluß der Durchbiegung etc. auszuschalten, konnten aber nur für geringe Exzentrizitäten durchgeführt werden, da sonst die elektrostatischen Kräfte den Innenzylinder trotz der Verspannung verschoben und zu kleine Werte der Feldstärken vortäuschten. In der horizontalen Anordnung, wo sich die Außenzylinder infolge der starken Verspannung nur ganz unwesentlich deformierten, war namentlich bei den Innenzylindern mit geringerem Radius eine Durchbiegung vorhanden (bei dem 2,3-cm-∅-Zylinder ca. 2—3 mm Höhendifferenz zwischen Mitte und Rand des 60,5-cm-∅-Außenzylinders). Es wurde in diesem Falle, wie oben erwähnt, natürlich immer der geringste Abstand in der Mitte gemessen, und es wurden die Zylinder immer exzentrisch nach unten verschoben. Bei diesem dünnen Rohr wurde wegen der Gefahr einer zusätzlichen Verbiegung durch die elektrostatischen Kräfte nur bis zu geringeren Exzentrizitäten gegangen als bei den dickeren Rohren.

Der Überschlag fand regelmäßig in der Längsmitte statt. Wo dies bei großen Exzentrizitäten nicht eintrat, wurde so lange an der Aufstellung korrigiert, bis es wieder der Fall war.

[1]) Geliefert von der Firma R. Ulrich in Eßlingen a. N.

[2]) Von der Firma A. Ziemann in Feuerbach-Stuttgart leihweise überlassen.

Die Überschläge traten sehr regelmäßig und gut reproduzierbar auf. Der Einfluß der Verzögerung war äußerst gering.

Die Anfangsspannung war nur bei den größeren Innenzylindern gleich der Funkenspannung. Bei den kleineren Zylindern wurde der Koronabeginn beobachtet und zwar mittels des Gehörs. Es liegt darin eine gewisse Unsicherheit, da die Spannung, bei der das Geräusch eintrat, nicht ganz eindeutig zu bestimmen war. Z. B. bei dem 2,305-cm-∅-Zylinder in dem 60,5-cm-∅-Zylinder trat das Geräusch bei sehr langsamer Spannungssteigerung bei ca. 1 % höherer Spannung auf, als bei etwas rascherer Steigerung. Beim Zurückgehen blieb es dann während einer Abnahme von 1 — 2 % der Spannung bestehen. Das Einsetzen der Geräusches erfolgte bei ganz langsamer Steigerung sehr scharf und plötzlich. Als Spannungswert für die Berechnung wurd der höchste gewählt, der sich noch ohne Eintreten der Korona erreichen ließ. Es ist also wohl möglich, daß dieser Wert über der wahren Anfangsspannung liegt, um so mehr als die übrigen sonstigen Entladungsgeräusche bei den hohen Spannungen vielleicht das erste schwache Entladungsgeräusch verschlungen haben. Die Messungen mit den 4,82-cm- und 2,305-cm-∅-Kupferrohren, sind daher mit einer gewissen Unsicherheit behaftet. Auch durch die Beobachtung des Lichteffektes ließ sich diese Unsicherheit nicht beseitigen. Der Coronaeffekt trat bei dem 2,305-cm-∅-Zylinder bei einer Schlagweite von ca. 4 cm auf, für dem 4,82-cm-∅-Zylinder bei ca. 10 cm Schlagweite, d. h. bei einer Schlagweite, die etwa dem doppelten Durchmesser entspricht. Die beiden dünnsten Rohre ergaben mit beiden Außenzylindern Koronaeffekte, das 4,82-cm-∅-Rohr mit dem 35-cm-∅-Zylinder allerdings nur in Form eines Knisterns unmittelbar vor dem Überschlag. Bei dem 60,5-cm-∅-Außenzylinder war mit dem 10,40-cm-∅-Innenzylinder ein Koronaeffekt nicht einwandfrei zu konstatieren. Wohl aber bei dem 4,82-cm-∅-Innenzylinder, dessen Funkenspannung bei konzentrischer Anordnung ca. 1 % über der Koronaspannung lag. Bei dem 2,305-cm-∅-Zylinder betrug dieser Unterschied schon 6,5 %.

Die Ermittlung der Durchbruchfeldstärke $\mathfrak{E}$ aus der Funkenspannung U geschah mit der Formel[1]):

$$\mathfrak{E} = U \cdot \frac{1}{s} \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)}{\frac{1}{2}(\varrho_1 - \varrho_2)} \cdot \frac{\mathfrak{Cof}\,\frac{\varrho_1}{2}}{\mathfrak{Cof}\,\frac{\varrho_2}{2}}$$

der in s die Schlagweite bedeutet und

$$\mathfrak{Cof}\,\varrho_1 = \left| \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2\,d\,R_1} \right| \quad \text{und} \quad \mathfrak{Cof}\,\varrho_2 = \left| \frac{R_1^2 - R_2^2 - d^2}{2\,d\,R_2} \right|$$

ist. R_1 und R_2 sind die Radien der Zylinder, d ihr Achsenabstand

$$d = R_2 - R_1 - s.$$

R_1 ist als der kleinere Radius vorausgesetzt. Auf die Wiedergabe der Kurven, die E als Funktion von U darstellen, verzichte ich, da sie nur für die vorliegenden Anordnungen Interesse haben.

Das Ergebnis der Versuche ist, daß die elektrische Festigkeit als unabhängig von der Exzentrizität der Zylinder angesehen werden darf, in dem ganzen untersuchten Gebiet, wie es die Bilder 16 und 17 zeigen. Dieses erstreckte sich bei dem 60,5 cm Außenzylinder von der konzentrischen Anordnung bis zu einer Schlag-

[1]) Ich verdanke diese Formel, die mit Hilfe hyperbolischer Tafeln eine sehr rasche Berechnung der elektrischen Feldstärke zuläßt, der Freundlichkeit von Herrn Prof. F. Emde, der sie mir aus einer unveröffentlichten Arbeit, in der das elektrostatische Problem mit Bipolarkoordinaten gelöst ist, zur Verfügung stellte. Ich möchte ihm auch hier herzlichst dafür danken.

weite von 3 cm, und bei dem 35-cm-∅-Zylinder bis zu einer Schlagweite von 2 cm. Die Werte bei kleineren Schlagweiten wurden nicht weiter berücksichtigt wegen der relativen Ungenauigkeiten der Abstandsmessung, wegen der möglichen Deformationen der langen Zylinder infolge der elektrostatischen Kräfte und weil in diesem Gebiet die Ungenauigkeiten der Bearbeitung sich unter Umständen schon störend bemerkbar machten.

Die aus einer sehr großen Zahl von Messungen sich ergebenden Einzelwerte sind in der umstehenden Tabelle zusammengestellt.

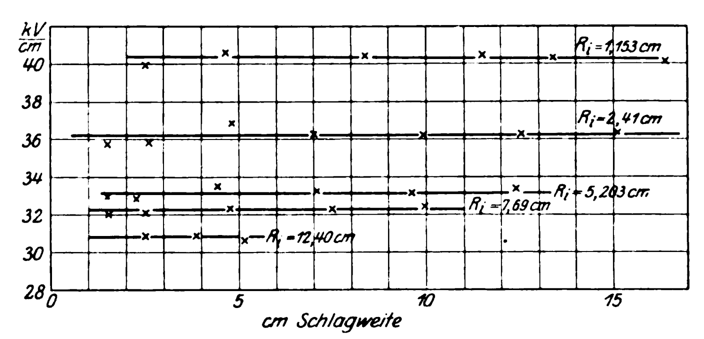


Bild 16. Elektrische Durchbruchfeldstärke zweier exzentrischer sich umhüllender Zylinder abhängig von der Schlagweite. 760 mm Hg. 20° C. Radius des Außenzylinders 17,5 cm.

Die größte Abweichung eines Einzelwertes von den angegebenen Mittelwerten beträgt bei den großen Zylindern ca. ± 1 % und steigt bei dem kleinsten auf ca. ± 2 %. Die Werte, die sich für den größeren Außenzylinder ergeben, sind durchwegs etwas höher als für den kleineren Außenzylinder. Die Unterschiede sind nur

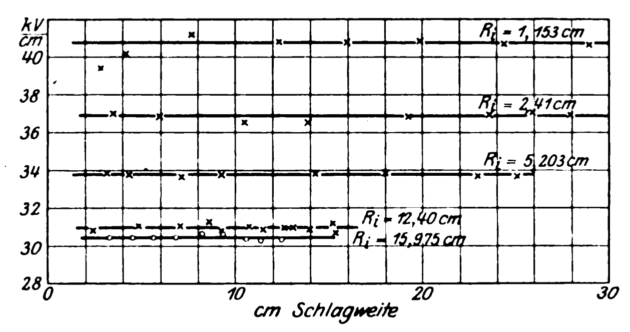


Bild 17. Elektrische Durchbruchfeldstärke zweier exzentrischer sich umhüllender Zylinder abhängig von der Schlagweite. 760 mm Hg. 20° C. Radius des Außenzylinders 30,25 cm.

gering und m. E. auf die störenden Effekte von sonstigen Vorentladungen, die bei dem größeren Zylinder stärker waren, zurückzuführen. Ich halte die Werte, die sich mit den kleineren Zylindern ergaben, für die genaueren. Jedenfalls kann aus diesen Differenzen, die z. T. noch in die Fehlergrenze fallen, keine Abhängigkeit vom äußeren Zylinderradius für das untersuchte System gefolgert werden.

Verglichen mit den Werten von Petersen gibt der 5,203-cm-Zylinder genügende Übereinstimmung (Abweichung ca. 0,4 %), während mit abnehmendem Radius die Unterschiede wachsen. Für den 2,41-cm-Zylinder ist der Unterschied 2 % und für den 1,153-cm-Zylinder 3,5 %. (Die Werte für den kleineren Außenzylinder genommen.) Die Unterschiede liegen außerhalb der Fehlergrenze. Wenn man sich aber der Bemerkungen über die Höhe der Koronaspannung erinnert und der Tatsache, daß Koronaentladung eventuell schon bei einer ca. 2 % geringeren Spannung

Elektrische Festigkeit sich umhüllender Zylinder in $\frac{kV}{cm}$
(bei 760 mm Hg und 20° C):

Innenzylinder-Radius cm	Außenzylinder-Radius 30,25 cm liegende Anordnung	Außenzylinder-Radius 30,25 cm stehende Anordnung	Außenzylinder-Radius 17,5 cm liegende Anordnung	Bemerkungen
15,975	30,43	30,50	—	Ergab im kleineren Außenzylinder Unregelmäßigkeiten infolge Bearbeitung.
12,40	30,95	30,80	30,83	
7,96	—	—	32,23	Wegen der geringen Länge nur im kleineren Außenzylinder zu messen.
5,203	33,77	34,00	33,11	33,0 } entsprechende Werte von Petersen.
2,41	36,84	—	36,20	35,5 }
1,153	40,77	—	40,30	39,0 } (Hochspannungstechnik 1911. S. 43.)

bei dem kleinsten Zylinder auftreten kann, so fallen die dann noch verbleibenden Differenzen in die Meßgenauigkeit hinein. Ich sehe deshalb für diese kleinen Radien die Petersenschen Werte als der Wahrheit näher kommend an, da sie jedenfalls mit erheblich kleinerem Außendurchmesser, d. h. bei geringerer Gesamtspannung, daher geringeren störenden sonstigen Vorentladungen, störenden Nebeneinflüssen und mit exakter zu beobachtendem Einsetzen der Entladung bestimmt wurden.

In Bild 18 sind die zuverlässigsten bisherigen Messungen an Zylinderelektroden mit Wechselstrom über einer logarithmischen Skala der Radien für 760 mm und 25° C dargestellt.

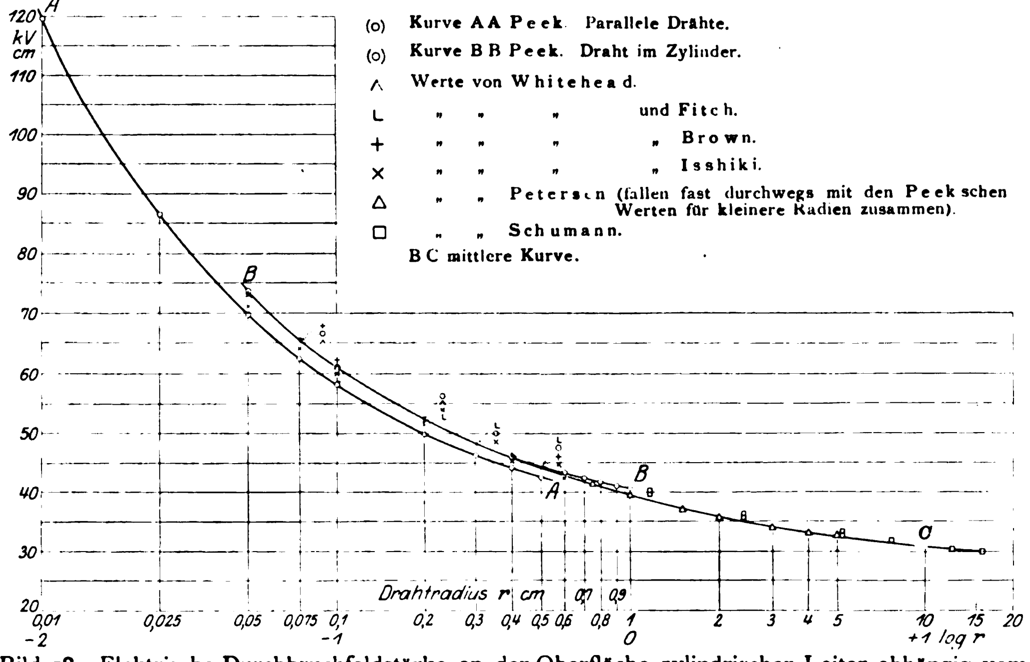


Bild 18. Elektrische Durchbruchfeldstärke an der Oberfläche zylindrischer Leiter abhängig vom Drahtradius. 760 mm Hg. 25° C.



Es sind dies:

1. F. W. Peek, Zwei parallele Drähte. $r = 0{,}0098$ bis $0{,}464$ cm. Proc. A. J. E. E. 30, 1535, 1911 (ETZ. 1912. S. 60). $\mathfrak{E}_m = 29{,}8 + \frac{8{,}97}{\sqrt{r}}$, 760 mm, 25° C.

2. F. W. Peek, Draht in einem Zylinder. $r = 0{,}0625$ bis $0{,}953$ cm. Trans. A. J. E. E. 31, 1085, 1912 (ETZ. 1913, S. 298.). $\mathfrak{E} = 31{,}0 + \frac{9{,}55}{\sqrt{r}}$, 760 mm, 25° C.

Alle folgenden Messungen beziehen sich ebenfalls auf einen Draht in einem Zylinder.

3. J. B. Whitehead, Proc. A. J. E. E. 30, 1079, 1911. $r = 0{,}0445 - 0{,}2375$ cm. $\mathfrak{E} = 32 + \frac{9{,}48}{\sqrt{r}}$ (bei 760 mm und 21° C).

4. J. B. Whitehead und T. T. Fitch, Proc. A. J. E. E. 32, 1317, 1913. $r = 0{,}119 - 0{,}425$ cm. $\mathfrak{E} = 33{,}6 + \frac{7{,}90}{\sqrt{r}}$, 760 mm, 25° C.

5. J. B. Whitehead und W. S. Brown, Trans. A. J. E. E. 36, 169, 1917. $r = 0{,}037 - 0{,}1155$ cm. $\mathfrak{E} = 33{,}7 + \frac{8{,}92}{\sqrt{r}}$, 760 mm, 25° C.

6. J. B. Whitehead und T. Isshiki, Journ. A. J. E. E. 39, 441, 1920. $r = 0{,}0519 - 0{,}633$ cm. 760 mm, 25° C.

$$\mathfrak{E} = 29{,}87 + \frac{9{,}92}{\sqrt{r}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{r}} < 2{,}3,$$

$$\mathfrak{E} = 33{,}03 + \frac{8{,}54}{\sqrt{r}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{r}} > 2{,}3.$$

7. W. Petersen, Hochspannungstechnik 1911. S. 43. $r = 0{,}05$ bis $5{,}0$ cm. 760 mm, 20° C.

Die Werte von Whitehead fallen (mit Ausnahme von 6, bei kleinen Radien) sehr angenähert mit den Peekschen zusammen. Auch die Werte von Petersen sind für kleinere Radien fast mit denen von Peek identisch, für größere Radien liegen sie tiefer. Die Werte für parallele Drähte liegen durchwegs unter denen für einen Draht in einem Zylinder. Ziehen wir auch hier die Kurve BC, die sich den meisten und besten Meßpunkten anschmiegt, so erhalten wir folgende Tabelle für die Durchbruchfeldstärke zylindrischer Leiter, die sich in einem größeren Hohlzylinder befinden:

Radius des Innenzylinders in cm	Durchbruchfeldstärke $\mathfrak{E}$ in $\frac{kV}{cm}$ bei **760 mm 20° C** (Bei Wechselspannungen Maximalwerte)	Radius des Innenzylinders in cm	Durchbruchfeldstärke $\mathfrak{E}$ in $\frac{kV}{cm}$ bei **760 mm 20° C** (Bei Wechselspannungen Maximalwerte)
15	30,5	0,75	42,0
12,5	30,8	0,5	44,8
10	31,3	0,4	46,7
7,5	32,1	0,3	49,0
5	33,1	0,2	53,3
4	33,7	0,1	62,0
3	34,7	0,05	75,1
2	36,6		
1	40,2		

Es zeigt sich also auch hier ein dauerndes, wenn auch bei größeren Radien geringes Abnehmen der Luftfestigkeit mit wachsendem Zylinderradius, so daß wenigstens bis zu Radien von 15 cm von einem asymptotischen Grenzwert der elektrischen Festigkeit nicht gesprochen werden kann.

B. Zylinder gegen Ebene.

Um festzustellen, wie sich die elektrische Festigkeit in dem Fall verhält, wenn sich die beiden Zylinder nicht umhüllen, wurden Überschlagskurven aufgenommen, bei denen eine Elektrode ein Zylinder, die andere die größere der auf S. 5 erwähnten Schalen war. Natürlich ist die Schale nur unvollkommen imstande, die unendlich große Ebene zu ersetzen, der sich der Zylinder gegenüber befinden sollte; aber für die die kleineren Abstände darf man hoffen, ein ziemlich richtiges Bild zu erhalten.

Es wurden Messungen ausgeführt, sowohl wenn beide Elektroden isoliert, als auch wenn die eine und dann die andere geerdet waren. Dabei wurde jedesmal die geerdete Elektrode unter der anderen angebracht, um einen direkten Einfluß der Erde möglichst zu eliminieren. Der Zylinder war horizontal angeordnet und die Schale wurde, wenn geerdet, auf einen Schemel darunter gestellt, wenn der Zylinder isoliert war, darüber aufgehängt. Dabei war aber die Mindestentfernung von der Erde immer ca. 1,70 m. Bei den vier größten Zylindern ergaben alle drei Messungsreihen dieselben Resultate bis zu Schlagweiten von 10 cm. Bei den beiden kleinsten hingegen zeigten sich erhebliche Abweichungen bei größeren Abständen. Die Überschlagsspannung war am größten, wenn der Zylinder geerdet war, am kleinsten, wenn die Schale geerdet war. Die Messungen mit symmetrischer Spannungsverteilung lagen ungefähr in der Mitte dazwischen. Bei dem kleinsten Zylinder betrug die größte Abweichung beider Spannungen bei 10 cm Schlagweite ca. 8% und verschwand erst bei Schlagweiten von 1—2 cm, bei dem 4,82-cm-∅-Zylinder betrug sie bei 11 cm Abstand ca. 7%. Es ist bekannt, daß die Überschlagswerte einer symmetrischen Funkenstrecke bei größeren Abständen abnehmen, wenn ein Pol der Strecke geerdet wird[1]). Bei unsymmetrischen Strecken kann sowohl Erhöhung als auch Erniedrigung eintreten, je nach dem geerdeten Pol. Es folgt dies aus den Grundeigenschaften des elektrischen Feldes[2]). Die Ladungen der Leiter lassen sich linear durch deren Potentiale ausdrücken z. B.:

$$e_k = \alpha_{1k} V_1 + \alpha_{2k} V_2 + \ldots + \alpha_{nk} V_n$$

$$\text{wobei } \alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \quad \alpha_{rr} > 0, \quad \alpha_{ra} < 0.$$

$$\text{und } \alpha_{rr} > -\Sigma\alpha_{ra}.$$

Für 2 Leiter kann man schreiben:

$$e_1 = \alpha_{11} V_1 - \alpha_{12} V_2$$

$$e_2 = -\alpha_{12} V_1 + \alpha_{22} V_2,$$

wenn α_{12} den Absolutwert des gegenseitigen Potentialkoeffizienten darstellt.

Ist nun I. $V_1 = -V_2 = \frac{V}{2}$,

so wird

$$e_{11} = \frac{V}{2} (\alpha_{11} + \alpha_{12})$$

$$e_{21} = -\frac{V}{2} (\alpha_{22} + \alpha_{12}).$$

II. $V_1 = V, \quad V_2 = 0,$

so wird

$$e_{12} = \alpha_{11} V$$

$$e_{22} = -\alpha_{12} V.$$

---

1) S. z. B. W. Weicker, Diss. Berlin 1910, S. 66. F. W. Peek, Proc. A. J. E. E., Bd. 33, Juni 1914, S. 889.

2) S. z. B. E. Cohn, „Das elektromagnetische Feld." S. 61 ff. und G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik III, S. 64.

III. $V_2 = V, \quad V_1 = 0,$

so wird

$$e_{13} = -\alpha_{12} V$$
$$e_{23} = \alpha_{22} V.$$

Da nun $\alpha_{12} < \alpha_{11}$ und auch $\alpha_{12} < \alpha_{22}$, so ist

$$\frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}}{2} < \alpha_{11} \qquad \frac{\alpha_{11} + \alpha_{12}}{2} > \alpha_{12}.$$
$$\frac{\alpha_{22} + \alpha_{12}}{2} > \alpha_{12} \qquad \frac{\alpha_{22} + \alpha_{12}}{2} < \alpha_{22}.$$

Es ist also

$$e_{12} > e_{11} \qquad |e_{13}| < e_{11}$$
$$|e_{22}| < |e_{21}| \qquad e_{23} > e_{21}.$$

Es wird durch die Erdung jedesmal die Ladung der isolierten Elektrode erhöht, dagegen die der geerdeten erniedrigt. Bei zwei symmetrischen Elektroden, wo die Beanspruchungen im symmetrischen Zustand gleich sind, tritt immer eine Erhöhung der Beanspruchung auf, d. h. die Funkenspannung wird erniedrigt. Sind die Elektroden aber ungleich, also auch ihre elektrischen Beanspruchungen bei symmetrischer Spannungsverteilung verschieden, so wird durch die Erdung der stärker beanspruchten deren Ladung herabgesetzt, die Ladung der geringer beanspruchten erhöht, und wenn die Differenz der Beanspruchung genügend groß war, kann totzdem die höchste Beanspruchung geringer sein als bei symmetrischer Spannungsverteilung, woraus dann eine Erhöhung der Entladungsspannung folgt. Wird dagegen die schon an sich geringer beanspruchte Elektrode geerdet, so tritt natürlich eine bedeutende Erniedrigung der Entladespannung auf. In dem vorliegenden Falle läßt sich diese Änderung der Beanspruchung noch etwas näher verfolgen. Die Anordnung Ebene—kleiner Zylinder läßt sich durch 2 geladene Geraden ersetzen. Sind die Ladungen beider gleich groß und entgegengesetzten Vorzeichens, so ist die Symmetrieebene eine Äquipotentialfläche. Sind die Ladungen dem Betrage nach nicht mehr gleich, so ist das nicht mehr der Fall, aber in erster Annäherung haben wir auch dann noch den Fall, daß dem einen Zylinder im halben Abstand des zweiten eine große wenig gekrümmte Fläche gegenübersteht. Den Einfluß der Erde kann man durch Spiegelung berücksichtigen, wie Bild 19 andeutet.

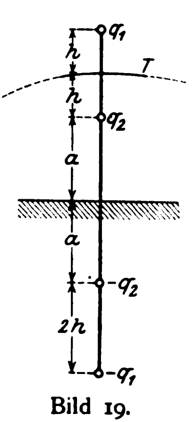


Bild 19.

Setzen wir für das Potential

$$v = -\frac{q}{2\pi} \ln r$$

an, so wird für den Leiter 1:

$$v_1 \cdot 2\pi = -q_1 \ln \varrho - q_2 \ln 2h + q_2 \ln 2(a+h) + q_1 \ln 2(a+2h)$$
$$= q_1 \ln \frac{2(2h+a)}{\varrho} + q_2 \ln \frac{a+h}{h}$$

und für die Trennfläche T:

$$v_T \cdot 2\pi = -q_1 \ln h - q_2 \ln h + q_2 \ln(2a+h) + q_1 \ln(2a+3h)$$
$$= q_1 \ln \frac{2a+3h}{h} + q_2 \ln \frac{2a+h}{h}.$$

Damit ergibt sich die Ladung q_1 zu

$$q_1 = 2\pi \frac{v_T \ln \frac{a+h}{h} - v_1 \ln \frac{2a+h}{h}}{\ln \frac{2a+3h}{h} \cdot \ln \frac{a+h}{h} - \ln \frac{2(2h+a)}{\varrho} \ln \frac{2a+h}{h}}.$$

Vergleichen wir die Werte von q_1 für $v_T = 0$ und für $v_1 = 0$ bei gleicher Gesamtspannung:

$$\left|\frac{q_{1\,v_T=0}}{q_{1\,v_1=0}}\right| = \frac{\ln\frac{2a+h}{h}}{\ln\frac{a+h}{h}} = \frac{\ln\left(1+\frac{2a}{h}\right)}{\ln\left(1+\frac{a}{h}\right)} > 1.$$

$q_{1\,v_1=0} > q_{1\,v_1=0}$, um so mehr je kleiner a gegen h ist, d. h. je größer der Einfluß der Erde ist. Wird $a \ll h$, so nähert sich das Verhältnis dem Wert 2, wir haben im ersten Fall die doppelte Beanspruchung bei gleicher Spannung wie im zweiten. Wird der Einfluß der Erde gering $(a > h)$, so wird der Effekt immer kleiner. Werden Schale und Zylinder an symmetrische Spannungen angeschossen $\left(v_T = -v_1 = \frac{v}{2}\right.$, so ergibt sich

$$\left|\frac{q_{1\,v_T=0}}{q_{1\,v_T=-v_1}}\right| = \frac{\ln\frac{2a+h}{h}}{\frac{1}{2}\left[\ln\frac{a+h}{h} + \ln\frac{2a+h}{h}\right]},$$

das sich für $a < h$ dem Werte $\frac{4}{3}$, also einem kleineren Werte wie oben nähert. Entsprechend dieser Steigerung der Feldstärken erhält man bei geerdetem Zylinder die höchste, bei isoliertem die niedrigste, und bei symmetrischer Spannungsverteilung eine dazwischen gelegene Entladungsspannung. Noch stärker ist der Effekt bei Kugeln ausgeprägt, wo man bei sehr ungleichen Kugeln sehr verschiedene Überschlagswerte erhalten kann[1].

Die definitiven Messungen wurden natürlich mit geerdeter Schale ausgeführt, wobei sich der Zylinder oberhalb der Schale befand.

Zur Auswertung der Messungen wurde die Formel von S. 12 benutzt, die sich für diesen Fall sehr vereinfacht.

Es wird nämlich

1) für gleiche Zylinder

$$R_1 = R_2 = R. \qquad \mathfrak{Cos}\,\varrho_1 = \left|\frac{d}{2R}\right|, \qquad \mathfrak{Cos}\,\varrho_2 = \left|-\frac{d}{2R}\right|, \qquad \varrho_1 = -\varrho_2.$$

und

$$\mathfrak{E} = \frac{U}{s} \cdot \frac{\mathfrak{Sin}\,\varrho}{\varrho}$$

$$\varrho = \ln\frac{d + \sqrt{d^2 - 4R^2}}{2R}$$

und damit

$$\mathfrak{E} = \frac{U}{s}\,\frac{\sqrt{\xi(2+\xi)}}{\ln\left(1 + \xi + \sqrt{\xi(2+\xi)}\right)}$$

wo

$$\xi = \frac{s}{2R}.$$

2) Für den Fall Zylinder-Ebene ist bei gleicher Feldstärke $\mathfrak{E}$ statt der Spannung U der Wert 2 U und statt der Schlagweite s der Wert 2 s zu setzen, wenn U nunmehr die Spannung Zylinder-Ebene und s die Schlagweite Zylinder-Ebene bedeutet. Damit

[1] Dieses Prinzip läßt sich, sinngemäß erweitert, zu einem äußerst einfachen Meßinstrument für Spannungen gegen Erde gestalten, indem die Entladeströme oder die Feldkräfte zum Betätigen von Zeigern oder Relais benützt werden. D. R. P. ang.

erhält man für $\mathfrak{E}$ genau die gleiche Formel, nur daß jetzt $\xi = \frac{s}{R}$ ist. In beiden Fällen gilt also $\mathfrak{E} = \frac{U}{s} \cdot f$, wo

$$f = \frac{\sqrt{(\xi + 2)\,\xi}}{\ln\left(\xi + 1 + \sqrt{(\xi + 2)\,\xi}\right)}.$$

In Bild 20 und 21 ist der Faktor f für das in Frage kommende Gebiet dargestellt. Er wächst nahezu proportional der Größe ξ [1]).

Die zu erreichende größte Schlagweite war bei den größeren Zylindern durch Randentladungen der Schale auf 9—10 cm begrenzt. Bei den kleineren Zylindern wurde auch nicht viel darüber hinausgegangen wegen der begrenzten Schalengröße.

Bezüglich der Verzögerung wurden dieselben Erfahrungen gemacht wie bei den ebenen Elektroden. Bei größeren Schlagweiten war kein Einfluß der Ionisierung festzustellen, bei kleinen hingegen waren bis über 2 % Unterschied zu konstatieren.

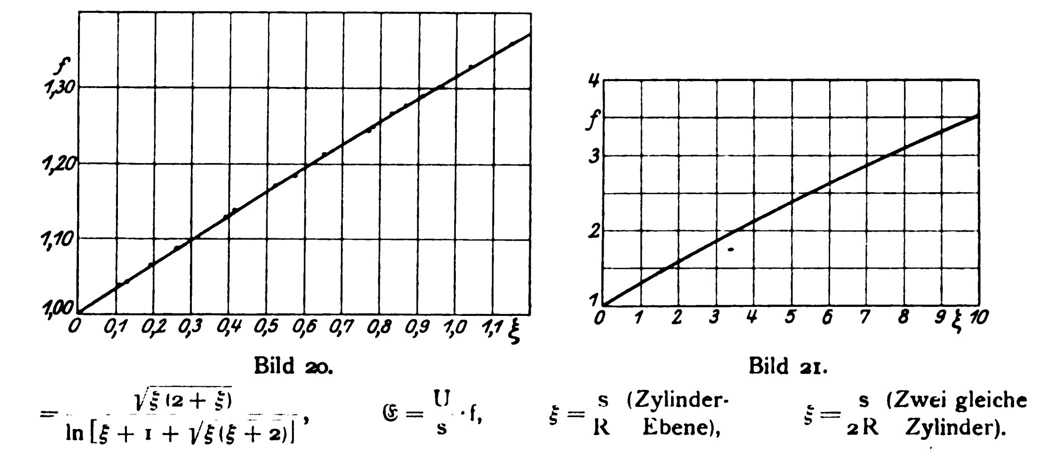


Bild 20. Bild 21.

$$f = \frac{\sqrt{\xi\,(2 + \xi)}}{\ln\left[\xi + 1 + \sqrt{\xi\,(\xi + 2)}\right]}, \quad \mathfrak{E} = \frac{U}{s} \cdot f, \quad \xi = \frac{s}{R} \text{ (Zylinder-Ebene)}, \quad \xi = \frac{s}{2R} \text{ (Zwei gleiche Zylinder)}.$$

Die Abstandsmessung wurde wieder kathetometrisch durchgeführt, kurz unterhalb der Entladungsspannung.

Bei dem 15,38-cm-∅-Zylinder war am deutlichsten eine kleinere Spannung der ersten Überschläge gegenüber den folgenden festzustellen (bis 2—3 % Unterschied). Bei den übrigen Zylindern war diese Erscheinung nicht zu beobachten.

Korona trat nur bei den beiden kleinsten Zylindern ein. Bei dem 4,82-cm-∅-Zylinder bei ca. 8 cm Schlagweite und sich in einem Knacken vor dem Überschlag äußernd, bei dem 2,305-cm-∅-Zylinder bei ca. 6 cm Abstand. Bei dem größten Abstand von 10 cm und geerdetem Rohr begann bei 21,4° 734 mm Hg, 101,4 kV das Knistern und es bildeten sich einige Lichtperlen. Bei 0,8 % höherer Spannung war das Knistern sehr stark, bei 1,5 % höherer Spannung trat Überschlag ein. Dagegen bei 0,5 % niedrigerer Spannung trat ab und zu unregelmäßiges, wieder verschwindendes Knistern ein, das scheinbar von Staub usw. herrührte.

Es wurde in diesen Fällen immer der höchste Spannungswert gewählt, der sich noch ohne Eintreten der Korona erreichen ließ.

Selbst bei diesem kleinen Rohr waren bei kleinen Abständen (kleiner als 1 cm) starke Verzögerungswirkungen zu beobachten.

Die aus den Messungen resultierenden Kurven sind in Bild 22 dargestellt. Die Abweichungen der Einzelwerte von den angegebenen Kurven sind in der erdrückenden Mehrzahl kleiner als + 1 %.

[1]) Nachträglich habe ich gesehen, daß schon A. Russell, Phil. Mag. (6), 6, 1906, S. 237, die gleiche Formel angibt.

In ganz wenigen seltenen Fällen stieg die Abweichung bis auf 1,6%. Bei den kleineren Abständen sind die Messungen ungenauer, sie sind deshalb z. T. nur bis 2 cm Schlagweite berücksichtigt.

Man sieht zunächst, daß von einem eindeutigen Festigkeitswert auch hier nicht mehr die Rede sein kann. Die größeren Rohre zeigen ein ausgeprägtes Minimum, die kleineren streben einem solchen zu. Dabei tritt das Minimum bei umso größeren Schlagweiten auf und wird um so flacher, je größer der Radius des Zylinders ist. Mit wachsendem Radius nimmt der Betrag des Minimums ab, der für jeden Radius eine charakteristische Konstante ist. Dabei sind sämtliche Werte absolut zu groß, denn für sehr großen Abstand Ebene—Zylinder hätten wir die Festigkeitswerte für konzentrische Zylinder (s. vorigen Abschnitt) zu erwarten, während sie nach den Kurven des Bildes 22 größer werden. Der Grund liegt in der ungenügenden

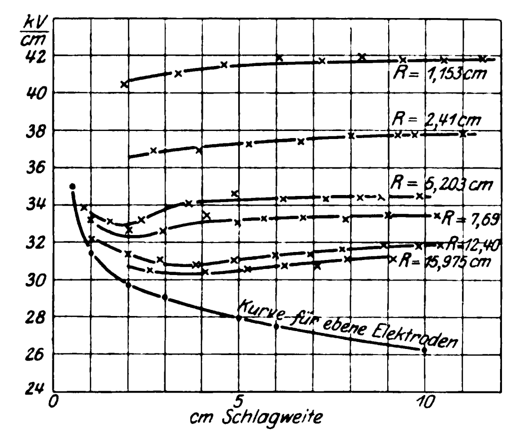


Bild 22. Elektrische Durchbruchfeldstärke an der Oberfläche eines Kreiszylinders gegenüber einer Ebene abhängig von der Schlagweite. 760 mm Hg, 20° C.

Größe der Schale, da die größte elektrische Dichte auf dem Zylinder mit abnehmender Schalengröße ebenfalls abnimmt. In Bild 22 ist noch die Kurve der Festigkeit ebener Elektroden eingezeichnet, der sich die Zylinderkurven mit zunehmendem Zylinderradius und abnehmenden Abstand immer mehr anschmiegen[1]).

[1]) Die Existenz dieses Minimums der elektrischen Durchbruchfeldstärke bei einer gewissen Schlagweite ist schon aus den (allerdings sehr unregelmäßig liegenden) Punkten der Messungen von C. P. Steinmetz, Trans. A. J. E. E. 15, 281, 1899 zu sehen, der zwei parallele (d. h. mit großem Krümmungsradius gebogene) Zylinder von 0,895 und 2,82 cm ⌀ bei geringen Schlagweiten untersucht. Bei Kugeln, bei denen dieses Minimum viel ausgeprägter ist, hat es erstmals A. Schuster, Phil. Mag. (5) 29, 182, 1890 nach den Versuchen von J. B. Baille, Ann. de chim. et phys. (5) 25, 486, 1882 und F. Paschen, Wied. Ann. 37, 69, 1889 festgestellt.

Im 2. Teil dieser Arbeit (der in Buchform erscheint) soll gezeigt werden, wie sich die inneren Zusammenhänge der Kurven der Durchbruchfeldstärke für verschiedene Elektrodenformen und Abstände mit Hilfe der Theorie der Stoßionisierung in Verbindung mit der Gestalt des elektrischen Feldes qualitativ und in vielen Fällen auch quantitativ verstehen lassen.



Eine nomographische Methode zur Vorausberechnung von Gleichstrommaschinen.

Von

Dr.-Ing. **Peter Frhr. von Stritzl**, Berlin-Charlottenburg.

I. Einleitung.

Die Berechnung von elektrischen Maschinen fußt weit mehr als die irgendeiner anderen Maschinengattung auf theoretisch abgeleiteten Beziehungen, doch müssen auch hier vielfach die Erfahrungen des praktischen Betriebes durch geeignete Erfahrungskoeffizienten berücksichtigt werden. Die Mannigfaltigkeit der Vorgänge in einer elektrischen Maschine, durch welche Probleme elektrischer, magnetischer, mechanischer und wärmetechnischer Natur in engen Zusammenhang gebracht werden, bringt es mit sich, daß zu ihrer Vorausberechnung eine Reihe von Einzeluntersuchungen durchzuführen sind, deren Forderungen einander häufig widersprechen. So muß beispielsweise für die Zahnschichte eines rotierenden Gleichstrom-Ankers ein Kompromiß angestrebt werden, welches bei nicht übermäßiger Nuttiefe noch zulässige Werte von Zahninduktion und Stromdichte in den Leitern ergibt, wobei die Umfangsgeschwindigkeit zwar behufs besserer Kühlung möglichst groß sein soll, aus Gründen der Kommutierung und mechanischen Festigkeit aber einen gewissen Höchstwert nicht übersteigen darf.

Die Berechnung elektrischer Maschinen im allgemeinen und der Gleichstrommaschinen im besonderen kann nun nach verschiedenen Gesichtspunkten und Methoden vorgenommen werden, denen jedoch allen eine große Anzahl zeitraubender, mehr oder weniger mechanisch durchzuführender Rechenoperationen als gemeinsamer Nachteil anhaftet. Um nun diesen, von allen mit der Berechnung elektrischer Maschinen Beschäftigten unangenehm empfundenen Mangel zu beheben, d. h. den rein mechanischen Teil des Rechnungsvorganges auf ein Minimum zu reduzieren, ist uns in dem von Maurice d'Ocagne vor ca. 40 Jahren erfundenen nomographischen Rechenverfahren ein Mittel an die Hand gegeben, welches es gestattet, Zusammenhänge auch einer großen Zahl von Veränderlichen in übersichtlicher Weise zu erfassen. Durch die Arbeiten von Mehmke, Schilling, Pirani, Seefehlner u. a. hat das Verfahren in letzter Zeit auch in Deutschland und Österreich steigende Verbreitung erlangt.

Der Verfasser hat nun den Versuch unternommen, eine Rechentafel zur Berechnung von Gleichstrommaschinen zu entwerfen. Bei der Anlage dieses Behelfes wurde nicht danach gestrebt, alle Gattungen und Größen von Maschinen in einer gemeinsamen Tafel zu erfassen, sondern es wurde der praktisch vorkommende und für die Darstellung einfachere Fall zugrunde gelegt, daß eine in den Hauptdimensionen bereits festliegende Reihe von Maschinen verwendet wird und durch die Rechnung bloß die Type sowie die Angaben für die Anker-, Wendepol-, Kompensations- und Erregerwicklung zu ermitteln sind. In Tabelle 1 sind die wichtigsten Angaben über die angenommenen Typen der Reihe NA zusammengestellt.

Tabelle 1. Gleichstrommaschinen, Reihe NA. — Hauptdaten.

Type NA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Leistung kW [1])	210	324	441	564	695	816	968	1100	1234	1365
Drehzahl n [1])	700	525	420	350	300	260	235	210	190	175
Essonsche Zahl [1]) C	95	110	120	128	135	140	145	150	153	155

[1]) Kann nötigenfalls abgeändert werden.

Polparzahl 3 bis 12. Ankerradius R = 30 bis 120 cm. Ankerinnendurchmesser $D_i = 31$ bis 211 cm. Ankerlänge[1]) $L_a = 41$ cm. Paketlänge des Ankers[1]) 35 cm. Pollänge[1]) $L_p = 41$ cm. Polbogen $\alpha' \tau_p = 21$ cm. Kraftfluß[1]) (ohne Streuung) $7{,}87 \cdot 10^6$ Maxwell. Normale Induktion[1]): Schenkel 14000, Anker 12000, Joch (Stahlguß) 11000, Luft 9800 Gauß. Kraftlinienlänge: Schenkel 20, Anker 16, Zähne[1]) 4, Kompensationszähne[1]) 5,5, Joch 28 bis 23 cm. Eisenquerschnitt[1]): Schenkel 637, Joch 430 cm^2. Mittlere Windungslänge[1]): Anker 182,5, Schenkel 130 cm.

Bevor der Gebrauch des Nomogrammes besprochen wird, ist es nötig, den Aufbau seiner einzelnen Bestandteile, welche teils „Fluchtlinientafeln", teils „Z-" und „Doppel-Z-Tafeln", teils aber auch empirisch gefundene „Projektivtafeln" sind, genau zu beschreiben.

Die Idee, welche dem nomographischen Rechenverfahren zugrunde liegt, ist die, durch möglichste Vereinfachung des rein manuellen bzw. mechanischen Teiles einer Rechnung die wertvolle Zeit des Ingenieurs besser auszunützen. Die Möglichkeit, im konkreten Fall dieses Ziel zu erreichen, ist meist eine vielfache, es sollen daher hier bloß die oben erwähnten grundlegenden Systeme von Nomogrammen behandelt werden, welche in mannigfacher Weise abänderungsfähig sind[1]).

Ein Nomogramm — die graphische Versinnbildlichung eines Gesetzes (νόμος) — ist ein Behelf, welcher es ermöglicht, auf zeichnerischem Wege die Lösung dieses Gesetzes für einen besonderen Fall zu finden. Als einfaches Beispiel eines Nomogrammes, das jedem Ingenieur geläufig ist, soll die Darstellung des Zusammenhanges zweier Veränderlichen

$$f(x, y) = 0$$

im kartesischen Koordinationssystem erwähnt werden; diese Darstellungsweise ist ein Spezialfall der sogenannten Flächennomographie, deren allgemeiner Grundgedanke der ist, daß einem beliebigen Wertepaar von x und y in einer Gleichung mit drei Veränderlichen

$$f(x, y, z) = 0$$

ein ganz bestimmter Wert von z zugeordnet ist; in Raumgeometrie übersetzt, bedeutet dies, daß zwei auf einer Fläche liegende Kurven, welche alle Punkte gleichen x bzw. gleichen y miteinander verbinden, mindestens einen bestimmten Schnittpunkt (welcher auch in die Unendlichkeit rücken kann) gemeinsam haben. Denken wir uns die Fläche, auf welcher sich dies abspielt, auf die Zeichenebene projiziert, so wird hier der Schnittpunkt der beiden Raumkurven als Schnitt zweier ebener Kurven erscheinen; indem wir nun auch noch alle Punkte mit gleichen Werten von z durch eine Kurve verbinden, erhalten wir ein Schnittsystem von 3 Kurvenscharen, das wir durch Streckung von 2 dieser Kurvenscharen in gerade Linien zu einem uns wohlbekannten Bild (Kurvenschar im kartesischen Koordinatensystem) verwandeln können.

Von dieser Methode grundverschieden ist das Prinzip der Skalendarstellung, die eigentliche Nomographie. Auch diese ist niemandem fremd: Thermometer, Rechenschieber, verschieden geteilte Maßstäbe sind Gegenstände, die weit über die Technik hinaus Verbreitung gefunden haben.

Analog, wie bei der Darstellung im Raume der Wertekombination $x_1\ y_1\ z_1$ in der Gleichung

$$f(x, y, z) = 0$$

[1]) Einen raschen Einblick in die Vielseitigkeit des nomographischen Rechenverfahrens gewährt u. a. M. Pirani, Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Sammlung Göschen.

ein ganz bestimmter Schnittpunkt dieser Kurven auf der diese Gleichung darstellenden Fläche entsprochen hat, legt hier eine Gerade, welche drei Punkte auf drei Skalenträgern miteinander verbindet, die Werte x_1 y_1 z_1 fest. Wir brauchen also bloß unsere Denkweise etwas umzustellen und werden sehen, daß damit eine Reihe von wesentlichen Vorteilen in dem oben angedeuteten Sinne erreicht sind.

Es entspricht:

dem Raum	die Zeichenebene,
den Koordinaten x_1, y_1, z_1	drei Punkte auf drei Skalenträgern,
einem Punkt auf der Fläche $f(x, y, z) = 0$ mit den Koordinaten x_1, y_1, z_1	die Verbindungsgerade obiger drei Punkte,
der Gestalt der Fläche	die Gestalt und Teilung der drei Skalenträger.

Diese duale Analogie genügt, um jede räumliche Darstellung eines Zusammenhanges zwischen drei Variabeln in eine skalenmäßige zu überführen, gleichgültig ob der analytische Ausdruck für diesen Zusammenhang bekannt ist oder nicht.

Nun sind wir aber nicht mehr, wie im Raum, auf 3 Veränderliche beschränkt und haben zudem ein handliches und praktisch mit Vorteil verwendbares Hilfsmittel zur numerischen Auswertung selbst der kompliziertesten Beziehungen gewonnen.

Nachstehend soll dies vorerst für einige einfache Fälle näher erörtert werden.

Es sei zunächst die Fluchtlinientafel genannt, welche zur Darstellung der Funktion

$$f(x) + f(y) = f(z) \qquad (I)$$

Bild 1. Fluchtlinientafel.

dient. Sie besteht aus zwei parallelen Skalen, auf welchen die beiden Summanden in beliebigen Maßstäben als Strecken aufgetragen sind, und aus einer dritten Skala, auf welcher durch Verbinden der Endpunkte der beiden ersteren der Wert der Summe abgeschnitten werden soll. Um die geometrischen Zusammenhänge, welche den Verlauf der Summenskala bestimmen, zu untersuchen, gehen wir von Bild 1 aus, in welchem die Größen f(x) und f(y) mit den Maßstäben a und b eingezeichnet sind (die Bezeichnungen sind dem Bilde zu entnehmen) und legen ein schiefwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung in O so, daß die Achse I in die + y-Richtung, die Verbindungslinie der beiden O-Punkte in die + x-Richtung fällt; in diesem Koordinatensystem wollen wir nun die Gleichung derjenigen Linie aufsuchen, welche die Bedingung erfüllt, daß

$$O''P = c \cdot f(z) = c \cdot (f(x) + f(y))$$

ist; c bedeutet hierbei die Maßeinheit von f(z).

Die Koordinaten des Punktes $P(d_1, c \cdot f(x))$ lassen sich nun durch gegebene Größen ausdrücken. Die Gleichung (I) muß auch für $f(x) = 0$ Gültigkeit besitzen, woraus folgt:

$$f(y) = f(z)$$

$$\frac{c \cdot f(z)}{b \cdot f(y)} = \frac{d_1}{D} = \frac{c}{b}. \qquad (IIa)$$

Analog findet man für $f(y) = 0$

$$\frac{D - d_1}{D} = \frac{c}{a} \qquad (IIb)$$

und erhält durch Gleichsetzung der sich hiermit ergebenden Werte für c die Bedingung:

$$(D - d_1)\, a = d_1 \,.\, b$$

$$d_1 = D \cdot \frac{a}{a+b}. \tag{II}$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung (IIa) ein, so ergibt sich

$$c = \frac{a\ b}{a+b} \tag{III}$$

als zweite Bedingung für die richtige Darstellung; a und b können hierbei alle positiven oder negativen, reellen Werte annehmen, also können auch c und d_1 positiv oder negativ sein. Die Gleichungen (II) und (III) bedeuten, in Worten ausgedrückt: „Die Summe zweier auf gleichlaufenden Geraden von beliebigen Punkten aus mit frei gewählten Maßstäben aufgetragenen Größen erscheint in einem durch Gleichung (III) festliegenden Maßstabe als Strecke auf einer dritten Parallelen, deren Nullpunkt mit denen der beiden ersten auf einer Geraden liegt und deren räumliche Lage durch Gleichung (II) bestimmt ist." Die Skalen der Funktionen sind hierbei als „Funktionsskalen" dadurch gekennzeichnet, daß zu jedem Wert von f(x), f(y), f(z) der zugehörige Wert von x, y, z geschrieben wird, wodurch die Funktion als solche aus der Zahlenrechnung ausgeschaltet erscheint. Ein Spezialfall, welcher noch erwähnt werden soll, ist der, daß

$$f(x) = \log x = \log \varphi(\xi)$$
$$f(y) = \log y = \log \varphi(\eta)$$
$$f(z) = \log z = \log \varphi(\psi)$$

Die Fluchtlinientafel eignet sich somit auch zur Darstellung des Produktes

$$\varphi(\xi) \cdot \varphi(\eta) = \varphi(\psi),$$

des Quotienten

$$\varphi(\xi) = \frac{\varphi(\psi)}{\varphi(\eta)},$$

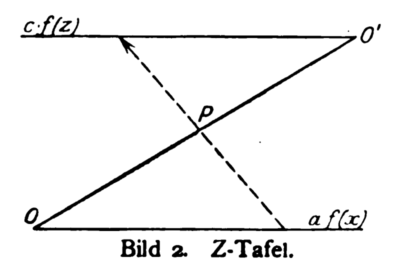


Bild 2. Z-Tafel.

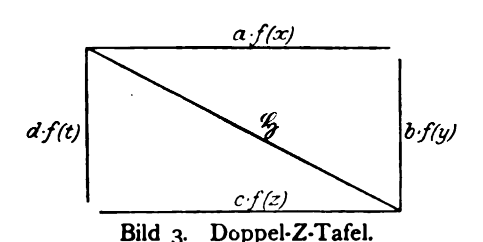


Bild 3. Doppel-Z-Tafel.

in weiterer Folge auch zur Darstellung von Potenzen, Wurzeln sowie von Kombinationen dieser Rechenoperationen. Da in der vorliegenden Abhandlung von diesen Möglichkeiten kein Gebrauch gemacht wird, sollen sie hier nicht näher untersucht werden.

Um ein Produkt ohne Verwandlung in Logarithmen graphisch auswerten zu können, beispielsweise im Anschluß an eine bereits vorhandene Skala einer Fluchtlinientafel, verwenden wir mit Vorteil die Z-Tafel. Lautet die aufzulösende Beziehung

$$f(x) \cdot f(y) = f(z), \tag{IV}$$

so erscheinen $a \cdot f(x)$ und $c \cdot f(z)$ wie früher als „Funktionsskalen"; wir ersehen nun aus der Proportionalität der Dreiecke in Bild 2, daß jedem Punkte P ein ganz bestimmtes Verhältnis $\frac{c \cdot f(z)}{a \cdot f(x)}$ oder da a und c hier willkürlich wählbare Maßeinheiten bedeuten, $\frac{f(z)}{f(x)} = f(y)$ zugeordnet ist, so daß jedem Punkte P auf der Diagonalen $\overline{OO'}$ ein Wert von y zugeschrieben werden kann; im Punkte O' ist $f(y) = 0$, in O ist $f(y) = +\infty$.

Will man die hierbei auftretende unregelmäßige, projektive Skala für f(y) vermeiden, oder hat man den Zusammenhang von vier oder fünf Größen darzustellen, so wird man zur Doppel-Z-Tafel greifen, welche auf dem gleichen Prinzip beruht wie die einfache Z-Tafel. Es braucht nicht näher erläutert zu werden, daß durch einen bestimmten Schnittpunkt auf der Diagonalen das Verhältnis

$$\frac{b\,f(y)}{d\,f(t)} = \frac{c\,f(z)}{a\,f(x)} = \mathfrak{H} \qquad \text{(Va)}$$

eindeutig festgelegt ist; in vielen Fällen braucht hierbei der Wert von $\mathfrak{H}$ gar nicht bekannt zu sein. Soll durch Gleichung (Va) das Gesetz

$$\frac{f(y)}{f(t)} = \frac{f(z)}{f(x)} = \mathfrak{H}^1 \qquad \text{(V)}$$

erfüllt werden, so müssen die Maßstäbe so zusammenhängen, daß

$$\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{H}^1} \qquad \text{(Vb)}$$

ist, d. h. drei Maßstäbe sind frei wählbar, der vierte ergibt sich zwangläufig. An eine Diagonale können nicht bloß zwei, sondern beliebig viele Z-Tafeln angeschlossen werden, jedoch leidet dann die Übersichtlichkeit, welche sonst einen besonderen Vorteil des nomographischen Rechenverfahrens bildet. Mit Hilfe der Z- und Mehrfach-Z-Tafeln sind wir auch in die Lage versetzt, beliebige Potenzen und Wurzeln sowie deren Funktionen in einfachster Weise zu erfassen, indem beispielsweise die Gleichung

$$y^p \cdot x^n = z^m$$

bloß einen Spezialfall der Gleichung (IV)

$$f(y) \cdot f(x) = f(z)$$

darstellt.

Hat man nun zusammengesetzte Funktionen mehrerer Variabeln bzw. deren Funktionen zu lösen, welche sich in einfacher Weise in Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Exponentialfunktionen zerlegen lassen, so hat deren nomographische Darstellung und Lösung keine prinzipielle Schwierigkeit mehr; man reiht eben soviele Fluchtlinien- und Z-Tafeln aneinander, als es das gegebene Problem erfordert und hat dann bei der Auflösung für einen speziellen Fall ebenso viele Linien zu ziehen. Im Wesen des Verfahrens liegt es aber, daß man anstrebt, mit einer möglichst geringen Zahl von Operationen zum Ergebnis zu kommen, weshalb noch zwei spezielle Fälle, in denen besondere Vereinfachungen möglich sind, erwähnt sein sollen.

Läßt sich die gegebene Gleichung auf die Form

$$f(x) \pm f(y) = \frac{f(z)}{f(t)} \qquad \text{(VI)}$$

bringen, so ist die Anwendung der Verhältnistafeln zu empfehlen[1]).

Hat man es aber mit einem solchen funktionellen Zusammenhang von nur 3 Variabeln zu tun, welcher nicht in einfacher Weise auf eines der vorangeführten Grundnomogramme zurückgeführt werden kann, so müssen wir, um den Zusammenhang durch Ziehen eines einzigen Strahles lösen zu können, zu krummlinigen Skalenträgern greifen, welche wir am besten punktweise konstruieren. In besonderen Fällen ist anch eine exakte Darstellung möglich. Diese etwas kompliziertere Methode lernen wir am besten an Hand eines Beispieles kennen. Es möge beispielsweise

$$x^{C_1 + y} \cdot y \cdot \sqrt[7]{z} + C_2 \cdot z - \log x = 0$$

die gegebene Funktion sein. Setzen wir in diese Gleichung beliebige reelle Werte von x und y ein, so erhalten wir zu jedem dieser Wertepaare einen zugehörigen

[1]) Näheres über diese interessante Art von Nomogrammen findet sich u. a. in dem bereits genannten Büchlein von M. Pirani.

Wert von z, durch welchen die Gleichung befriedigt wird. Wir setzen nun für die eine der drei Variabeln, etwa für x, eine beliebige Skala fest. Sodann nehmen wir für die voraussichtlichen höchsten und niedrigsten Werte von z geeignete Punkte z_1 und z_2 an und erhalten in den von z_1 und z_2 nach Punkten von x gezogenen Strahlen geometrische Örter für die zugehörigen Werte von y. Die Schnittpunkte der zu gleichen Werten von y gehörigen Strahlen liefern den Skalenträger für y; durch die bekannten Punkte von y kann man nun für ein bestimmtes z durch die zugehörigen Punkte von x ein Strahlenbündel legen, in dessen Scheitel der Punkt für das betreffende z liegt. Verbindet man alle z-Punkte, so hat man hiermit auch den Skalenträger für z festgelegt und hat nun bloß noch die Teilung der Skalen durch Interpolation zu ergänzen.

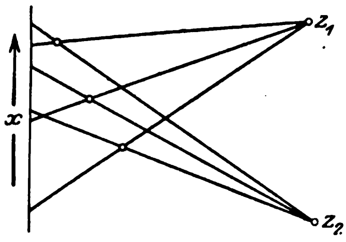


Bild 4. Entwurf einer Projektivtafel.

II. Aufbau des Nomogrammes.

(Vgl. Bild 11.)

Wir haben nun die einzelnen Teile, welche uns zum Aufbau einer Rechentafel zur Verfügung stehen, in großen Zügen kennen gelernt und wollen daran gehen, den Aufbau der Tafel selbst, welche den Zusammenhang einer bedeutenden Anzahl von Variabeln, wie sie bei der Berechnung elektrischer Maschinen eben vorkommt, darstellen soll, einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

Von rechts unten beginnend, ist zunächst in der Z-Tafel 1 die bekannte Gleichung zur Berechnung der Hauptdimensionen

$$kW = C\,R^2\,L\,n\,10^{-4}$$

in der Form

$$\frac{1}{kW} = C_1 \cdot \frac{1}{n} \tag{1}$$

dargestellt, wobei C_1 für jede Maschinentype ein Festwert ist.

Links anschließend stellt Tafel 2 die Beziehung

$$E \cdot J = kW \cdot 1000$$

bzw.

$$\frac{1}{E} \cdot \frac{1000}{J} = \frac{1}{kW} \tag{2}$$

in Z-Form graphisch dar, weiter die Doppel-Z-Tafel 3 die Gleichung

$$\delta_a \cdot q_a = \frac{J}{2a}\,^{1)}$$

bzw.

$$\frac{\frac{1}{J}}{\frac{1}{q_a}} = \frac{\frac{1}{2a}}{\delta_a}. \tag{3}$$

In Tafel 4 folgt der Zusammenhang des Ankerwiderstandes mit den Kupferabmessungen, wobei eine Kupferleitfähigkeit $\lambda = 56$ zugrunde gelegt wurde, und neben der Ankerkupferlänge l_a auch die Gesamtstabzahl S kotiert ist,

$$r_a = \frac{1}{56}\,\frac{la}{q_a}\left(\frac{1}{2a}\right)^2$$

in der Form

$$\frac{\frac{1}{q_a}}{4a^2} = \frac{\frac{1}{l_a}}{\frac{1}{r_a}} \tag{4}$$

[1]) δ_a bezeichnet die Stromdichte im Ankerkupfer.

und weiters in Tafel 5

$$G_a = q_a \cdot l_a \cdot 8900 = \text{Leiterhöhe} \times \text{Leiterstärke} \times l_a \times 8900$$

$$\frac{G_a}{\text{Leiterstärke}} = \frac{\text{Leiterhöhe} \cdot 8900}{\frac{1}{l_a}} \qquad (5)$$

An die gleichmäßige Skala für die Leiterstärke ist nun seitlich Tafel 6, darstellend den durch die Stärke der Isolation gegebenen Zusammenhang zwischen Nutbreite, Leiterzahl pro Nut und Leiterstärke, angeschlossen; der Zusammenhang dieser Größen ist analytisch weder als Produkt noch als Summe darstellbar, weshalb als einfachste graphische Wiedergabe ein System unregelmäßiger Skalen entsteht, deren Konstruktion folgendermaßen durchgeführt wird:

Zunächst berechnet man nach den vorliegenden Angaben über die Größe der Isolationsabzüge einige Punkte der zu entwerfenden Skalen.

Hat man beispielsweise (für die Reihe NA) abzuziehen:
bei 2 Schichten-Stabwicklung und
2 × 1 Leiter pro Nut 2 mm in der Breite 5,5 mm in der Tiefe (unter dem Keil)
2 × 2 „ „ „ 3 „ „ „ „ 5,5 „ „ „ „ „ „ „
2 × 3 „ „ „ 3,5 „ „ „ „ 5,5 „ „ „ „ „ „ „
2 × 4 „ „ „ 4 „ „ „ „ 5,5 „ „ „ „ „ „ „
2 × 5 „ „ „ 4,5 „ „ „ „ 5,5 „ „ „ „ „ „ „
so bleibt als Leiterstärke:

Tabelle 2.

für	Nutbreite 7 mm	10 mm	15 mm	20 mm
2×1 L. p. N.	5	8	13	18
2×2	2	3,5	6	8,5
2×3	1,17	2,17	3,83	5,5
2×4	0,75	1,5	2,75	4
2×5	—	1,1	2,1	3,1

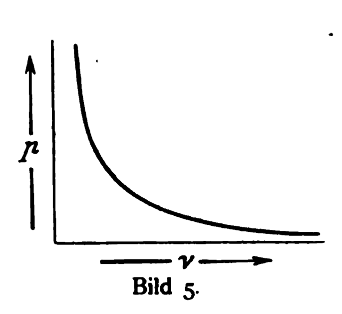


Bild 5.

Die Skala für die Leiterstärke muß der Proportionalitätsbedingung der Doppel-Z-Tafel 5 Genüge leisten und deshalb gleichmäßig geteilt sein, liegt also fest. Nimmt man nun beispielsweise für 2 × 3 Leiter pro Nut einen beliebigen Punkt an, so liegt auf dem Verbindungsstrahl von diesem Punkt zu dem Punkt für 1,17 mm Leiterstärke $b_n = 7$, auf dem Strahl zu 2,17 mm $b_n = 10$ usw.; legen wir nun auf einem dieser Strahlen, z. B. demjenigen für $b_n = 10$ einen frei wählbaren Punkt fest, so muß auf dem durch ihn und den Punkt für 3,5 mm Leiterstärke gezogenen Strahle der Punkt für 2 × 2 Leiter pro Nut liegen; diesen letzteren nehmen wir nun derart an, daß er mit dem bereits festliegenden Punkt für 2 × 3 Leiter auf einer zur Leiterstärke-Skala parallelen Geraden liegt. Man erhält nun im Schnittpunkt der Verbindungslinie (2 × 2 Leiter; 2 mm Leiterstärke) mit dem bereits gezogenen Strahl (2 × 3 Leiter, 1,17 mm Leiterstärke) den Punkt für $b_n = 7$ usw.; die Verbindungslinie aller b_n-Punkte ergibt sich als eine unbestimmt verlaufende, kontinuierliche Kurve, ein „gekrümmter Skalenträger", in diesem Falle nahezu geradlinig. Zwischenpunkte darauf können durch Interpolation gefunden werden.

An die Skala für die Leiterhöhe in Tafel 5 schliesst die Fluchtlinientafel 7 an, welche die Funktion

$$2 \times \text{Leiterhöhe} + (5,5 + \text{Keilstärke}) = T_n{}^{1)} \qquad (7)$$

zur Darstellung bringt.

[1]) Nuttiefe, mm.

Die Skala für T_n gehört auch der Doppel-Z-Tafel 8 an, welche die Zahnampèrewindungen als Funktion der Zahnhöhe bzw. Nuttiefe und der Zahninduktion ergibt. Dieser Tafel liegt nachstehender Gedankengang zugrunde:

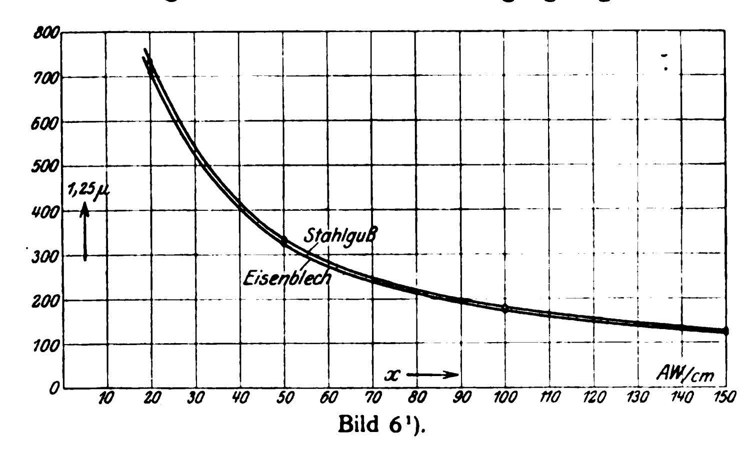


Bild 6[1]).

Trägt man allgemein für ein permeables (paramagnetisches) Material die Permeabilitätskonstante μ als Funktion der aufzuwendenden Ampèrewindungen in einem kartesischen Koordinatensystem auf, so erhält man, von ganz schwachen Sättigungen abgesehen, eine Kurve, welche in ihrem Verlauf stark an die in der Wärmetechnik

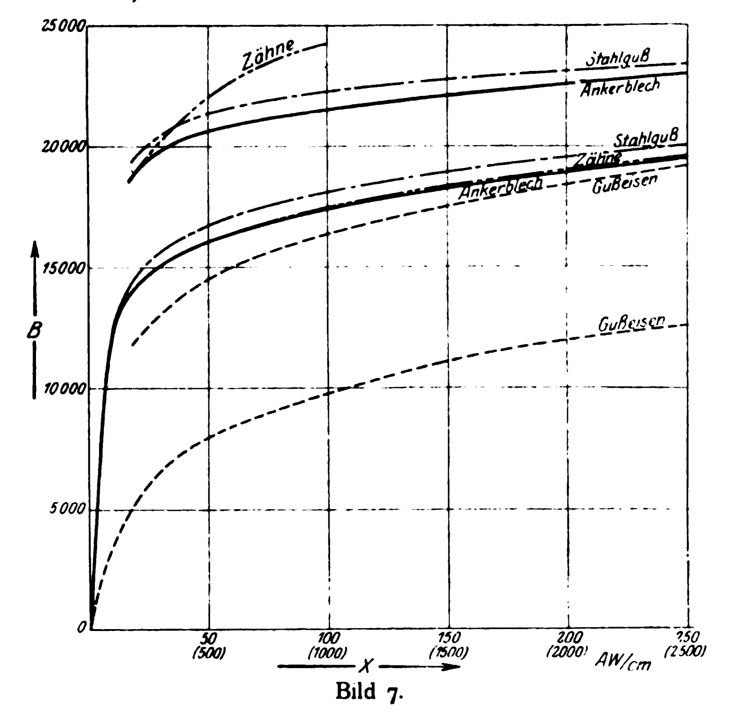


Bild 7.

vielfach verwendete Polytrope, darstellend die Beziehung $p \cdot v^n = C$ erinnert. Soll ein ähnlicher Zusammenhang wie zwischen Druck und Volumen eines polytropisch expandierenden Gases auch für unser Problem bestehen, so müßten für n und C in der Gleichung

$$\mu \cdot x^n = C^{1)}$$

Festwerte auffindbar sein, welche bloß vom verwendeten Material abhängen.

[1]) X bezeichnet allgemein Amperewindungen, x dagegen AW pro cm.

Es soll zunächst versucht werden, solche Werte von n und C für Stahlguß und Dynamoblech zu ermitteln. Wir entnehmen einer auf Grund genauer Messungen aufgestellten Magnetisierungskurve (Bild 7) oder noch besser den weit übersichtlicheren und handlicheren Skalen (Bild 8) nachfolgende Werte:

Tabelle 3.
(Siehe auch Bild 6.)

	x =	10	20	50	100	150	200	250
	log x =	1	1,3010	1,699	2	2,1761	2,3010	2,3979
für Stahlguß	$\frac{B}{x} = 1{,}25\,\mu =$	1200	732	335	181,7	126,5	98	80,7
„	log 1,25 μ =	3,0792	2,8645	2,5250	2,2591	2,1021	1,9912	1,9069
f. Eisenblech	$\frac{B}{x} = 1{,}25\,\mu =$	1215	708	322	175	122	94,5	77,6
„	log 1,25 μ =	3,0846	2,85003	2,5079	2,2430	2,0864	1,9754	1,8899

	x =	300	350	400	500	1000	3000
	log x =	2,4771	2,5441	2,6021	2,699	3	3,4771
für Stahlguß	$\frac{B}{x} = 1{,}25\,\mu =$	68,3	59,6	52,5	42,7	22,3	7,87
„	log 1,25 μ =	1,8344	1,7752	1,7202	1,6304	1,3475	0,896
f. Eisenblech	$\frac{B}{x} = 1{,}25\,\mu =$	66,1	57,5	51,0	41,5	21,5	7,79
„	log 1,25 μ =	1,8202	1,7597	1,7076	1,618	1,3324	0,8915

Soll nun n ein Festwert sein, so muß log x mit log 1,25 μ linear zusammen hängen, da

$$n \cdot \log x + \log 1{,}25\,\mu - \log C = 0$$

eine lineare Funktion von log x und log 1,25 μ ist, das heißt log 1,25μ in Abhängigkeit von log x in einem kartesischen Koordinatensystem aufgetragen, muß als gerade Linie mit der Richtungstangente n erscheinen. Tatsächlich ergibt sich nun bloß angenähert eine Gerade (Bild 9); es muß daher untersucht werden, welcher Fehler durch die Annahme des geradlinigen Verlaufes, das heißt eines konstanten Exponenten n begangen würde. Aus Bild 9 ist zu entnehmen, daß die Richtungstangente n für Stahlguß etwa zwischen 0,890 und 0,936, für Dynamoblech zwischen 0,892 und 0,927 schwankt, und zwar liegen die höheren Werte bei den höheren Werten der Induktion. Wird n versuchsweise mit 0,915 eingesetzt, so kann nach Bild 9 erwartet werden, daß sich bei $B > 15000$ Gauß brauchbare Resultate ergeben werden. Es erübrigt noch, einen Wert von C zu finden; es ist allgemein

$$\log C = n \cdot \log x + \log 1{,}25\,\mu$$

oder, falls man einige spezielle Werte von x und μ und n = 0,915 einführt, für Stahlguß:

$$C \doteq 12150,$$

für Dynamoblech:

$$C \doteq 11750.$$

Das hiermit festgelegte Gesetz

$$1{,}25\,\mu \cdot x^{0{,}915} = C$$

enthält noch den Faktor μ, welcher für das praktische Rechnen besser durch $\frac{B}{1{,}25\,x}$

Magnetisierungsskalen.

Stahlguß. Eisenblech. Gußeisen.

Bild 8.

Bild 9.

ausgedrückt wird; ferner ist es erwünscht, das gesuchte x in der ersten Potenz erscheinen zu lassen, weshalb die Gleichung umgeformt wird:

$$B \cdot \frac{x^{0,915}}{x} = C$$

$$x^{0,085} = \frac{B}{C}$$

$$x = \left(\frac{B}{C}\right)^{11,75}$$

Vergleicht man die auf diese Weise errechneten Werte mit Meßergebnissen, so ergeben sich starke Abweichungen, namentlich bei Induktionen unter 20000 Gauß; wenn es auch möglich sein dürfte, diese Fehler durch Annahme eines anderen Exponenten ganz wesentlich zu verringern, so sieht man doch, daß ein befriedigendes Ergebnis in dieser Richtung nicht erwartet werden kann, es können eben die in Bild 9 gezeichneten Kurven

$$\log \mu = f(\log x)$$

nicht mit genügender Genauigkeit durch gerade Linien ersetzt werden.

Die Tatsache aber, daß die Abweichungen von den gemessenen Werten für große Induktionen geringer werden, gibt dazu Veranlassung, die Anwendung des oben umrissenen Verfahrens für die am höchsten gesättigten Teile des Eisenkreises elektrischer Maschinen zu versuchen, das sind die Ankerzähne und die Kompen-

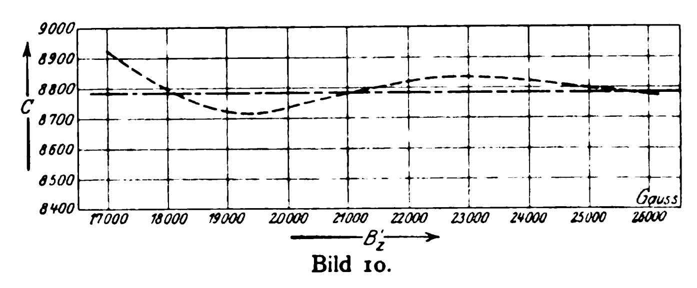


Bild 10.

sationszähne. Der Rechnung wird hier nahezu allgemein ein mehr oder weniger experimentell gefundener Zusammenhang zwischen der scheinbaren Zahninduktion und den erforderlichen Ampèrewindungen zugrunde gelegt, wobei die Erweiterung des Querschnittes gegen außen am besten nach dem von Pichelmayer angegebenen Verfahren durch Zerlegung des Zahnes in mehrere Schichten berücksichtigt wird. Trägt man die Logarithmen der von Pichelmayer angegebenen Werte von x[1]) und 1,25 μ in Bild 9 auf, so verläuft die Verbindungslinie der so gefundenen Punkte fast genau geradlinig unter einer Neigung n = 0,853; dies bedeutet, daß hier tatsächlich die Gleichung der Polytrope

$$1,25 \cdot \mu \cdot x^{n} = C$$

mit großer Annäherung Gültigkeit besitzt. Wie früher wird μ durch $\frac{B'}{1,25\,x}$ ersetzt; die Gleichung lautet dann

$$B' \cdot x^{0,853-1} = C$$

$$x^{0,147} = \frac{B'}{C}$$

beziehungsweise

$$x = \left(\frac{B'}{C}\right)^{6,8}.$$

Hieraus kann nun C ermittelt werden, indem man für B' und x bekannte Wertepaare einsetzt. Es ist

[1]) Siehe Bild 7. B' bedeutet die scheinbare Induktion an einer bestimmten Stelle des Zahnes.

$$\log C = \log B' - 0{,}147 \log x.$$

Man findet (Bild 10) als Mittelwert $C = 8783$ und erhält gute Übereinstimmung.

Da es sich hier um Größen handelt, welche, namentlich wegen der Ungleichheit des zur Verwendung kommenden Materials, theoretisch mit keiner größeren Genauigkeit bestimmbar sind, als die berechneten Werte von den vorliegenden Meßergebnissen abweichen ($\pm 4{,}5\%$), können wir uns mit dem erreichten Genauigkeitsgrad begnügen.

Wir können demnach die von Pichelmayer[1]) angegebene Zahnmagnetisierungskurve (Bild 7) durch die gefundene Beziehung

$$X_z = \left(\frac{B'}{C}\right)^{6,8} \cdot l$$

ersetzen, wobei l die radiale Dimension eines der Streifen bedeutet, in welche nach der Pichelmayerschen Methode die Zähne zerlegt werden müssen; der neuen Methode würde nun also der gleiche Nachteil erhalten bleiben, daß die Rechnung, um halbwegs genau zu bleiben, für einige Streifen von etwa 1 cm Länge getrennt durchgeführt werden müßte, schließlich wären dann noch die Ergebnisse dieser Teilrechnungen zu addieren. Dadurch aber, daß es sich nun nicht mehr um einen empirischen, sondern um einen, wenn auch nicht streng richtig, analytisch festgelegten Zusammenhang von X und B' handelt, sind wir in die Lage versetzt, nicht nur die Rechnung bedeutend zu vereinfachen, sondern auch die Genauigkeit des Verfahrens wesentlich zu steigern, indem wir die Abschnitte l unendlich klein werden lassen und hierdurch von der willkürlichen Annahme Pichelmayers, daß in einem Streifen von der endlichen Länge l die Induktion konstant gleich derjenigen in der Tiefe $^2/_3$ l sei, frei werden.

Bezeichnen wir mit

B'_{max} ...... die scheinbare Induktion am Zahngrund

B'_{min} ...... die scheinbare Induktion am Zahnkopf

$v_z = \frac{B'_{max}}{B'_{min}} = \frac{\tau_{na} - b_n}{\tau_{ni} - b_n}$, das Zahnverhältnis

y ...... den radialen Abstand vom Zahnkopf,

so gilt für den Amperewindungsbedarf einer Schichte von der Dicke dy

$$dX = \left(\frac{B'_y}{C}\right)^{6,8} \cdot dy.$$

B'_y, die scheinbare Induktion in der Tiefe y, läßt sich nun durch die maximale Induktion ausdrücken:

$$B'_y = B'_{max} \cdot \frac{1}{v_z} \cdot \left[\frac{y}{T_n} \cdot (v_z - 1) + 1\right]$$

$$= \frac{B'_{max}}{v_z \cdot T_n} \cdot \left[y \cdot (v_z - 1) + T_n\right].$$

Setzen wir nun der Einfachheit halber

$$\left[y \cdot (v_z - 1) + T_n\right] = z$$

$$dy = \frac{dz}{v_z - 1},$$

so wird

$$dX = \left(\frac{B'_{max}}{C \cdot v_z \cdot T_n} \cdot z\right)^{6,8} \cdot \frac{dz}{v_z - 1}$$

und

[1]) Analog könnte der Ableitung auch jede andere gegebene Zahnmagnetisierungskurve zugrunde gelegt werden.

$$X_z = \frac{1}{v_z - 1}\cdot\left(\frac{B'_{max}}{C\cdot v_z\cdot T_n}\right)^{6,8}\cdot\int_{y=0}^{y=T_n} z^{6,8}\cdot dz$$

$$= \frac{1}{v_z - 1}\cdot\left(\frac{B'_{max}}{C\cdot v_z\cdot T_n}\right)^{6,8}\cdot\frac{1}{7,8}\cdot\left[(v_z\cdot T_n)^{7,8} - T_n^{\;7,8}\right]$$

$$= T_n\cdot\frac{v_z^{7,8} - 1}{v_z^{7,8} - v_z^{6,8}}\cdot\frac{1}{7,8}\cdot\left(\frac{B'_{max}}{C}\right)^{6,8}. \qquad (8\,a)$$

Um nun diesen Ausdruck in die nomographische Darstellung zu überführen, bringen wir ihn auf die Form

$$\frac{X_z}{B'^{\,6,8}_{max}} = \frac{1}{7,8\cdot C^{6,8}}\cdot\frac{T_n}{\dfrac{v_z^{7,8} - v_z^{6,8}}{v_z^{7,8} - 1}} \qquad (8)$$

und benutzen für die Darstellung dieser Gleichung die Doppel-Z-Tafel 8. Um die Skalenteilungen zeichnen zu können, müssen wir die Werte der Funktionen von B'_{max} und von v_z zunächst für einige Punkte berechnen.

Tabelle 4.

B'_{max}	$6,8\cdot\log B'_{max}$	$B'^{\,6,8}_{max}$
18 000	28,93604	$8,631\cdot 10^{28}$
19 000	29,09584	$12,4695\cdot 10^{28}$
20 000	29,24680	$17,652\cdot 10^{28}$
21 000	29,39096	$24,6033\cdot 10^{28}$
22 000	29,52832	$33,7553\cdot 10^{28}$
23 000	29,65956	$45,6622\cdot 10^{28}$
24 000	29,78536	$61,0085\cdot 10^{28}$
25 000	29,90572	$80,484\cdot 10^{28}$
26 000	30,02200	$105,200\cdot 10^{28}$

Ferner berechnen wir:

$$C = 8783$$
$$6,8\cdot\log C = 26,816752$$
$$C^{6,8} = 6,55777\cdot 10^{26}.$$

Tabelle 5.

v_z	$7,8\cdot\log v_z$	$6,8\cdot\log v_z$	$v_z^{7,8}$	$v_z^{6,8}$	$\frac{v_z^{7,8} - v_z^{6,8}}{v_z^{7,8} - 1}\cdot 7,8\cdot C^{6,8}$
1,40	1,13985	0,99348	13,7900	9,85160	$0,1570\cdot 10^{28}$
1,35	1,01634	0,88604	10,3835	7,69233	$0,1465\cdot 10^{28}$
1,30	0,88842	0,77425	7,7344	5,94642	$0,1357\cdot 10^{28}$
1,25	0,75582	0,65892	5,6950	4,55920	$0,1240\cdot 10^{28}$
1,20	0,61776	0,53856	4,1476	3,45584	$0,1125\cdot 10^{28}$
1,15	0,47346	0,41276	2,97472	2,58682	$0,1005\cdot 10^{28}$
1,10	0,32292	0,28152	2,10343	1,91226	$0,0883\cdot 10^{28}$
1 05	0,16536	0,14416	1,46331	1,39375	$0,0766\cdot 10^{28}$
1,01	0,03354	0,02924	1,08035	1,06960	$0,0683\cdot 10^{28}$

Für $v_z = 1{,}0$ nimmt der Ausdruck $\frac{v_z^{7,8} - v_z^{6,8}}{v_z^{7,8} - 1}$ die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, deren wahrer Wert durch Differentiation von Zähler und Nenner und Einsetzen des Wertes $v_z = 1$ gefunden wird:

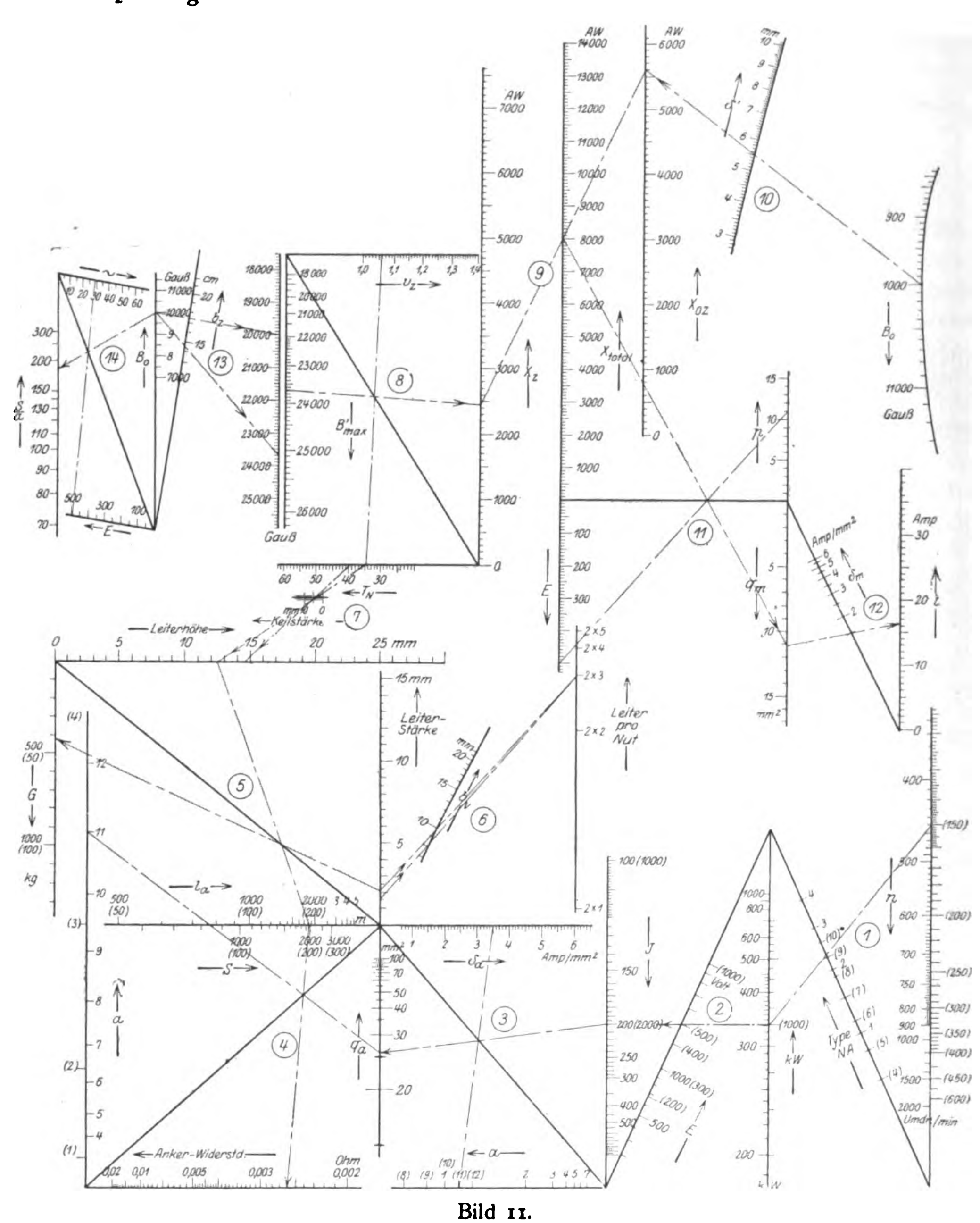


Bild 11.

$$\frac{7{,}8 \cdot v_z^{6,8} - 6{,}8 \cdot v_z^{5,8}}{7{,}8 \cdot v_z^{6,8}} \cdot \frac{10^{28}}{2{,}03} = 0{,}0633 \cdot 10^{28}.$$

Auf Grund der berechneten Punkte kann die Doppel-Z-Tafel 8 ohne weiteres entworfen werden; die Skala für X_z dient gleichzeitig der Darstellung der Summe

$$X_z + X_{oz} = X_{\text{pro Pol}}$$

in der Fluchtlinientafel 9, deren Skala für X_{oz} die in Tafel 10 gefundenen „Ampèrewindungen ohne Zähne" enthält.

Scheidet man nämlich aus dem magnetischen Kreis der Maschine die Anker- und Kompensationszähne, welche durch die im vorigen aufgestellte Näherungsformel (8) erledigt erscheinen, aus, so verbleiben als Kraftlinienweg nur noch Luftspalt, Anker, Schenkel und Joch. Die Ampèrewindungen, welche für den Luftspalt benötigt werden, sind bekanntermaßen

$$X_l = 0{,}8 \cdot \delta' \cdot B_l. \tag{10a}$$

Für den Anker besteht der Zusammenhang

$$X_a = l_a \cdot x_a; \qquad x_a = f_1(B_a) \tag{10b}$$

analog für Schenkel und Joch

$$X_{sch} = l_{sch} \cdot x_{sch}; \qquad x_{sch} = f_2(B_{sch}) \tag{10c}$$

$$X_j = l_j \cdot x_j; \qquad x_j = f_3(B_j). \tag{10d}$$

Die Funktionen f_1, f_2, f_3 hängen vom verwendeten Material ab; die entsprechenden Werte können entweder Magnetisierungskurven entnommen oder aber nach Näherungsformeln berechnet werden. Da hier bloß Induktionen von etwa 7000 bis höchstens 15000 Gauß vorkommen, lassen sich mit Vorteil die für diesen Bereich gute Übereinstimmung mit Meßergebnissen zeigenden, von M. Osnos in E. u. M. 1916, S. 515 veröffentlichten Gleichungen von der Form

$$B = C_1 - \frac{C_2}{x} \text{ respektive } x = \frac{C_2}{C_1 - B}$$

gebrauchen. Für eine gegebene Maschine läßt sich also durch Addition der Gleichungen (10a) bis (10d) der gesuchte Wert von X_{oz} unschwer berechnen:

$$X_{oz} = X_l + X_a + X_{sch} + X_j. \tag{10e}$$

Um aber die Methode wiederum für die Maschinen der eingangs erwähnten Typenreihe N A 1 bis N A 10 gemeinsam benutzen zu können, ist es erforderlich, daß diese in ihren geometrischen Verhältnissen einander ähnlich sind, das heißt möglichst gleiche Länge, Polteilung, Schenkellänge etc. besitzen, sich also in der Hauptsache nur dadurch voneinander unterscheiden, daß sich ihre Polzahl dem Ankerdurchmesser proportional ändert. Ist dies der Fall, so können wir durch Wahl eines „normalen" Kraftflusses die „normalen" Induktionen in den betrachteten Teilen des magnetischen Kreises eindeutig für die ganze Reihe festlegen und haben bei geändertem Feld (bzw. bei anormaler Eisenlänge) dann bloß die „normalen" Induktionen B_l, B_a, B_{sch} und B_j mit einem „Feldausnützungsfaktor" φ zu reduzieren, so daß die Gleichung (10a) folgende Form annimmt:

$$X_{oz} = C_1 \cdot \varphi \cdot \delta' + C_2 \cdot F_1(\varphi) + C_3 \cdot F_2(\varphi) + C_4 \cdot F_3(\varphi). \tag{10}$$

Der Wert von X_{oz} läßt sich hiernach für jeden beliebig gewählten Wert von φ und δ' ermitteln.

Zur Herstellung des entsprechenden graphischen Rechenbehelfes hat man nun eine Reihe von Werten durchzurechnen und hierfür vor allem die Konstanten C_1 bis C_4 zu bestimmen.

$$C_1 = 0{,}8 \cdot B_{l\,norm} = 8570,$$
$$C_2 = l_a \cdot f_1(B_{a\,norm}) = 152,$$
$$C_3 = l_{sch} \cdot f_2(B_{sch\,norm}) = 372,$$
$$C_4 = l_{j\,mittel} \cdot f_3(B_{j\,norm}) = 215.$$

Die Funktionen $F(\varphi)$ werden nun an Hand von Magnetisierungskurven (Skalen) punktweise bestimmt.

Tabelle 6.

φ	$F_1(\varphi)$	$F_2(\varphi)$	$F_3(\varphi)$
0,85	0,665	0,5	0,795
0,9	0,745	0,61	0,875
0,95	0,85	0,765	0,91
1,0	1,0	1,0	1,0
1,05	1,195	1,36	1,08
1,1	1,44	1,88	1,17
1,15	1,795	2,69	1,305

Somit ergeben sich für X_{oz} folgende Werte:

Tabelle 7.

δ' =	3 mm	4 mm	5 mm	6 mm	7 mm	8 mm	9 mm	10 mm
φ = 0,85	2638	3368	4098	4818	5558	6268	7008	7738
0,9	2838	3618	4378	5148	5928	6688	7458	8228
0,95	3050	3870	4670	5490	6310	7110	7920	8730
1,0	3309	4169	5019	5869	6739	7579	8439	9309
1,05	3621	4521	5411	6311	7221	8101	9011	9921
1,1	4000	4940	5870	6820	7770	8690	9650	10590
1,15	4512	5492	6472	7452	8452	9422	10412	11402

Um die Abhängigkeit X_{oz} von φ und δ' graphisch so darzustellen, daß die Lösung durch Ziehen eines einzigen Strahles gefunden werden kann, müssen wir wieder zur Verwendung krummliniger Skalenträger greifen und entwerfen die Tafel 10 im Anschluß an die bereits bestehende gleichmäßige Skala für X_{oz} in folgender Weise:

Wir ziehen durch einen beliebigen Punkt $\varphi = 0,85$ und den Punkt $X_{oz} = 4818$ auf der Skala eine Gerade und nehmen auf ihr passend den Punkt für $\delta = 6$ mm an; durch diesen Punkt ziehen wir nun Strahlen nach $X_{oz} = 5148, 5490, 5869, \ldots,$ auf welchen die Punkte $\varphi = 0,9,\ 0,95,\ 1,0\ \ldots$ liegen müssen.

Analog nehmen wir auf der Geraden $\varphi = 0,85$ $X_{oz} = 5558$ einen beliebigen Punkt $\delta' = 7$ an und ziehen durch ihn das zugehörige Strahlenbündel; derart fortfahrend erhalten wir ein System von Strahlenbündeln für die verschiedenen Werte von φ, an deren Scheitelpunkten wir die Punkte für $\varphi = 0,9,\ 0,95$ usw. festsetzen und durch eine stetige Kurve verbinden; ebenso legen wir durch alle δ'-Punkte eine Kurve und können nun durch bloßes Verbinden von Punkten der drei Skalen deren einander zugeordnete Werte auffinden.

Die Bemessung der Erregerwicklung erfolgt nach der an die Skala für X_{total} der Tafel 9 angeschlossenen Doppel-Z-Tafel 11 mit Hilfe des Zusammenhanges

$$q_m = \frac{2 \cdot p \cdot X_{total} \cdot l_m}{0,85 \cdot E \cdot \lambda_t} \tag{11a}$$

oder entsprechend umgeformt

$$\frac{q_m}{X_{total}} = C \cdot \frac{p}{E} \tag{11}$$

wobei

$$C = \frac{2 \cdot l_m}{0,85 \cdot \lambda_t} \tag{11b}$$

Für die Reihe NA errechnet sich dieser Wert zu

$$C = \frac{2 \cdot 1,27}{0,85 \cdot 50} = 0,06$$

An die nunmehr gegebene Skala für q_m schließt sich noch die Z-Tafel 12 an, welche den Strom in der Erregerwicklung

$$i = q_m \cdot \delta_m \tag{12}$$

liefert.

Während sich die Doppel-Z-Tafel 8 nach rechts in der beschriebenen Weise fortsetzt, schließt sich links an die doppelte Skala für B'_{max} die Z-Tafel 13 an; ihr liegt die Gleichung

$$B'_{max} = \frac{\Phi}{0,9 \cdot L \cdot b_z \cdot \alpha} \tag{13a}$$

zugrunde. Für Φ kann auch gesetzt werden

$$\Phi = B_o \cdot \alpha \cdot \tau_p \cdot L$$

Damit nimmt die darzustellende Beziehung folgende Form an:

$$B'_{max} = \frac{\tau_p}{0{,}9} \cdot \frac{B_o}{b_z}. \qquad (13)$$

Endlich vermittelt die links anschließende Tafel 14 den Zusammenhang der magnetischen Beansprucuung mit den Daten der Ankerwicklung, es ist nämlich

$$E = \frac{S}{a} \cdot \Phi \cdot \frac{p \cdot n}{60} \cdot 10^{-8}$$

$$E = \frac{S}{a} \cdot \alpha \cdot \tau_p \cdot L_a \cdot B_o \cdot \frac{p \cdot n}{60} \cdot 10^{-8} \qquad (14a)$$

oder für die nomographische Darstellung umgeformt:

$$\frac{E}{\sim} = \alpha \cdot \tau_p \cdot L_a \cdot 10^{-8} \cdot \frac{\frac{B_o}{1}}{\frac{S}{a}}. \qquad (14)$$

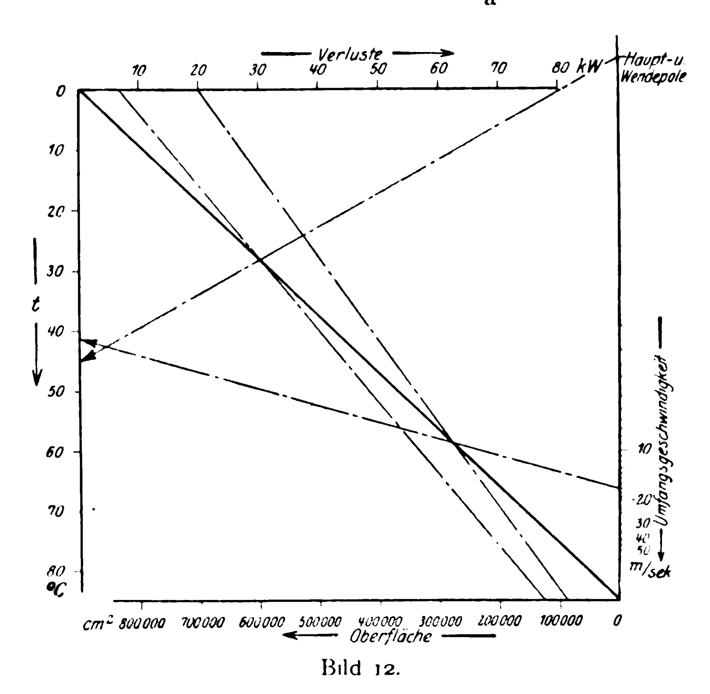


Bild 12.

Die Reihe der Gleichungen, welche bei der Vorausberechnung von Gleichstrommaschinen zu berücksichtigen sind, ist hiermit lange nicht erschöpft; der Übersichtlichkeit und Handlichkeit der Rechentafel, welche nomographisch ohne prinzipielle Schwierigkeit soweit ergänzt werden könnte, daß alle überhaupt in Frage kommenden Werte und Abmessungen aus ihr abgelesen werden könnten, wegen wollen wir uns aber mit dem Bisherigen begnügen, zumal die noch fehlenden Zusammenhänge (Wendepol- und Kompensationswicklung, Wickelraumausnützung auf den Hauptpolen, Kommutatorabmessungen, Verluste usw.) größtenteils aus einfachen Produkten und Quotienten bestehen, die mit dem gebräuchlichen logarithmischen Rechenschieber in einfacher Weise gelöst werden können; es wird sich empfehlen, für diesen Zweck ein vorgedrucktes Blatt zu verwenden, in welches die errechneten Werte eingetragen werden.

Mit Absicht wurde bisher die Erwärmung unberücksichtigt gelassen, obgleich es zweckmäßig ist, jeden in seinen Abmessungen festgelegten Teil der Maschine

sogleich auf seine Erwärmung zu kontrollieren. Da aber für die Erwärmung irgendeines Teiles einer elektrischen Maschine nach Ossanna die Gleichung

$$t = t_0 \cdot \frac{V}{O} \tag{15}$$

besteht, wobei für die Haupt- und Wendepolwicklung

$$t_0 = 900,$$

für alle übrigen Maschinenteile

$$t_0 = \frac{500}{1 + \frac{u}{10}} \tag{15a}$$

gesetzt werden kann, liegt der Gedanke nahe, hierfür ein gemeinsames Nomogramm zu entwerfen; u bedeutet (relativ) die Geschwindigkeit des gekühlten Teiles in m/sec. Die Gleichung (15) läßt sich nun in einer Doppel-Z-Tafel darstellen, wobei t_0 als funktionelle Skala von u zu kotieren ist. Wir erhalten die in Bild 12 dargestellte Tafel.

III. Praktische Anwendung.

Die Vielseitigkeit der behandelten Aufgabe führt naturgemäß auf eine große Zahl von Möglichkeiten für die Reihenfolge und Durchführung der einzelnen Rechenoperationen; es finden sich auch in der einschlägigen Literatur die verschiedensten Gesichtspunkte vertreten. Beispielsweise wird man für schnelllaufende Maschinen mit großen Eisen- und Reibungsverlusten zweckmäßig von der Wahl der Zahnsättiguug ausgehen und auch die Güte der Kommutierung von vornherein untersuchen; dagegen wird bei langsamlaufenden Motoren die letztere im allgemeinen keine besonderen Schwierigkeiten bereiten, vielmehr wird hier infolge ungünstiger Kühlungsverhältnisse die Stromdichte gering gehalten werden müssen, ferner wird man auf den Wert des Strombelages pro cm Ankerumfang besondere Aufmerksamkeit zu richten haben, während die Zahnsättigung und überhaupt die Eisenverluste hier nur eine untergeordnete Rolle spielen und bloß durch die Möglichkeit der Unterbringung der Erregerwicklung einer Begrenzung unterworfen sind; man wird daher in diesem Falle am besten die Rechnung mit der Annahme der Stromdichte im Ankerkupfer beginnen.

Dieser Vielseitigkeit ist nun durch die Einführung des nomographischen Verfahrens der weiteste Spielraum gelassen, wobei die Durchsichtigkeit der Zusammenhänge für jeden denkbaren Berechnungsweg als wichtiger Vorteil des Verfahrens stets die gleiche bleibt. Ein Blick auf die Tafel läßt direkt erkennen, welche Folgen die Abänderung einer Veränderlichen auf die anderen Größen ausübt.

Am besten lernen wir die Vorteile des neuen Verfahrens an der Hand eines Beispieles kennen.

Es sei ein Motor von 500 Volt, 1000 kW für 150 Umdrehungen pro Minute zu berechnen. Es soll eine Maschine der Reihe NA[1]) zur Verwendung gelangen; durch Ziehen des Verbindungsstrahles 1000 kW — 150 Touren liest man auf der Diagonalskala in Tafel 1 ab, daß für den vorliegenden Zweck die Type NA 9 noch knapp ausreicht. Die Abmessungen und die mechanische Konstruktion des Stators wie des Rotors liegen hiemit fest; auf die Dimensionierung von Welle, Lagern und der übrigen Konstruktionsteile soll hier nicht eingegangen werden. In elektrischer Hinsicht wäre also jetzt der nächste Schritt die Festlegung der Ankerwicklung. Tafel 2 ergibt I = 2000 Ampere; nehmen wir die Stromdichte im Anker

$$\delta_a = 3{,}5 \text{ Amp/mm}^2$$

an, so ergibt für Schleifenwicklung, welche wir stets anstreben wollen, die Tafel 3

$$q_a = 25{,}6 \text{ mm}^2.$$

[1]) S. Tabelle 1.

Mit $E = 500$ Volt, $\sim = \frac{p \cdot n}{60} = \frac{11 \cdot 150}{60} = 27,5$ und dem angenommenen $B_o = 10000$ Gauß ergibt sich aus Tafel 14

$$\frac{S}{a} = 184,$$

also $S = 2025$, was aus Wicklungsgründen in $S = 2024$ abgeändert wird. Wollen wir pro Polteilung etwa 12 bis 15 Nuten ausführen, so müssen 2×3 Stäbe in einer Nut liegen. Wir wählen nun eine Nuttiefe $T_n = 4$ cm und erhalten bei 5 mm Keilstärke aus Tafel 7 14,9 mm als Leiterhöhe; da der Querschnitt zu 25,6 mm² bereits berechnet wurde, bleibt als Leiterstärke $\frac{25,6}{14,9} = 1,72 \sim 1,7$ mm, dies liefert nach Tafel 6 eine Nutbreite

$$b_n = 8,4 \text{ mm}.$$

Da insgesamt $\frac{2024}{2 \times 3} = 338$ Nuten am Umfang vorhanden sind, der gesamte Umfang aber $2 R\pi = 220 \cdot \pi = 690$ cm bzw. am Nutengrund $212 \cdot \pi = 667$ cm beträgt, so ist der Zahnbogen pro Pol:

außen: $$\frac{690 - 338 \cdot 0,84}{22} = 18,45 \text{ cm},$$

innen: $$\frac{667 - 338 \cdot 0,84}{22} = 17,4 \text{ cm}.$$

Dies würde, wie Tafel 13 zeigt, eine zu geringe Zahnsättigung ergeben, daher wird T_n auf 3,5 cm herabgesetzt. Hiermit sinkt die Leiterhöhe (Tafel 7) auf 12,5 mm, die Leiterstärke wird 2,05 mm, somit nach Tafel 6

$$b_n = 10,3 \text{ mm}.$$

Der Zahnbogen pro Pol ist nunmehr:

außen: $$\frac{690 - 338 \cdot 1,03}{22} = 15,5 \text{ cm},$$

innen: $$\frac{671 - 338 \cdot 1,03}{22} = 14,6 \text{ cm}.$$

Aus Tafel 13 findet man nun $B'_z = 23700$, mit $v_z = \frac{15,5}{14,6} = 1,06$ aus Tafel 8

$$X_z = 2450.$$

Mit $S = 2024$ liest man aus Tafel 4 $l_a = 1845$ m und den Ankerwiderstand zu 0,0026 Ω, aus Tafel 5 das Kupfergewicht der Ankerwicklung zu 420 kg ab.

Nimmt man den Luftspalt zu 0,5 cm, den korrigierten Luftspalt zu 0,55 cm an, so kann man in Tafel 10 die $X_{oz} = 5600$, in Tafel 9 $X_{total} = 8000$ AW auffinden. Damit wieder findet man aus Tafel 11 $q_m = 11,1$ mm² und schließlich aus Tafel 13 $i = 16,1$ Ampères.

Um auch noch die Erwärmung der hiermit entworfenen Maschine zu kennen, berechnen wir die Verluste und Oberflächen:

1. Anker:

$V_1 = 1,2 \cdot J^2 \cdot r_a = 1,2 \cdot 2000^2 \cdot 0,0026$	$= 12450$ Watt
$v_{ha} = 2 \cdot 9,5 = 19$ Watt/dm³	
$Vol_a = \frac{(21,3^2 - 19,1^2) \cdot \pi}{4} \cdot 0,9 \cdot 3,5 = 214$ dm³	$V_{ha} = 4060$ „
$v_{hz} = 2 \cdot 26,5 = 53$ Watt/dm³	
$Vol_z = \frac{0,095 + 0,101}{2} \cdot 0,35 \cdot 0,9 \cdot 3,5 \cdot 338 = 36,4$ dm³	$V_{hz} = 1930$ „
$v_{wa} = 0,004 \cdot 27,5^2 \cdot 12250^2 \cdot 10^{-8} = 4,5$ Watt/dm³	$V_{wa} = 960$ „
$v_{wz} = 0,004 \cdot 27,5^2 \cdot 23200^2 \cdot 10^{-8} = 16,25$ Watt/dm³	$V_{wz} = 590$ „
	$V = 19990$ Watt

$O_z = 22 \cdot 15{,}5 \cdot 35 \qquad = 12000 \text{ cm}^2$
$O_{st} = \qquad = 3000$ „
$O_i \cdot k_1 = 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 35 \cdot 191 \cdot \pi \qquad = 11000$ „
$O_{st+v} \cdot k_2 = 0{,}65 \cdot 14 \cdot \frac{(213^2 - 191^2)\pi}{4} \qquad = 61500$ „

$O = 87500 \text{ cm}^2$

Bild 12 liefert

$t = 41{,}3^0.$

2. Schenkel.

Um 8000 AW mit $i = 16{,}1$ Amp. zu erzeugen, sind pro Pol

$$\frac{8000}{16{,}1} = 496 \text{ Windungen,}$$

insgesamt also $22 \cdot 496 = 10900$ Windungen nötig, Die totale Drahtlänge ist somit $10900 \cdot 1{,}30 = 14200$ m, der Widerstand der Erregerwicklung bei Hintereinanderschaltung aller Pole

$$r_m = \frac{1}{56} \cdot \frac{14200}{11{,}1} = 22{,}9\ \Omega$$

und der Erregerverlust

$$V_e = 1{,}2 \cdot 16{,}1^2 \cdot 22{,}4 = 7140 \text{ Watt.}$$

Wird die Wicklungstiefe mit 4 cm, die Höhe des Wickelraumes mit 18 cm eingesetzt, was bei genauer Berechnung durch Anfertigen einer Polskizze zu überprüfen wäre, — so beträgt die kühlende Oberfläche

$$O = 22 \cdot 2 \cdot 22 \cdot 130 = 126000 \text{ cm}^2.$$

Aus dem Nomogramm Bild 12 folgt die Übertemperatur

$$t = 45^0.$$

IV. Übersicht.

Zusammenfassend sei hier nochmals das Ergebnis der Arbeit festgestellt.

Zweck der Arbeit war, einen Behelf zu entwerfen, welcher die zeitraubenden Zahlenrechnungen, die man bei Vorausberechnung von Gleichstrommaschinen durchzuführen hat, vereinfacht. In diesem Sinne wurden die Zusammenhänge, in welchen die zahlreichen hierbei in Betracht kommenden Variabeln untereinander stehen, in möglichst einfachen Rechentafeln dargestellt und derart aneinandergereiht, daß ihre gegenseitige Abhängigkeit in übersichtlicher Weise zu erkennen ist.

Im Zusammenhange hiemit wurde insbesondere für die Magnetisierungslinie der Zahnschichte eine gute Übereinstimmung zeigende Näherungsformel gefunden, welche die Berechnung weiterhin vereinfacht.

Weiters wurde es durch die nomographische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Kraftfluß und Ampèrewindungszahl für den übrigen magnetischen Kreis der Maschine (mit Ausschluß der Zähne) ermöglicht, diesen bisher umständlichsten Teil der Maschinenberechnung, welcher unter Zuhilfenahme mehrerer Magnetisierungskurven im Wege einer umfangreichen tabellarischen Aufstellung gelöst werden mußte, hier durch Ziehen einer einzigen geraden Linie mit der gleichen Genauigkeit zu erledigen.

In ähnlicher Weise wurde ferner der Zusammenhang zwischen den Abmessungen der Zähne bzw. Nuten und der Wicklung erfaßt.

Schließlich wurde in einer zweiten Tafel dem Rechner ein bequemes Mittel an die Hand gegeben, eine in ihren Abmessungen festgelegte Wicklung ohne Zeitverlust auf ihre Temperaturerhöhung zu überprüfen.

Durch das im III. Kapitel durchgerechnete Beispiel wird der Gebrauch des Behelfes erläutert.



Beitrag zur elektrischen Festigkeitslehre.

Von

A. Schwaiger.

(Mitteilung Nr. 11 aus dem Hochspannungslaboratorium des elektrotechnischen Instituts der Technischen Hochschule in Karlsruhe.)

1. Allgemeines. Die einfachste Formel zur Berechnung der Durchschlagspannung einer Anordnung ist bekanntlich die für zwei parallele Platten; sie lautet:

$$P = \mathfrak{E} \cdot a; \quad (1)$$

hierin bedeutet P die Durchschlagsspannung in Volt, $\mathfrak{E}$ die Durchschlagfestigkeit des Isoliermaterials in $\frac{\text{Volt}}{\text{cm}}$ und a den lichten Abstand der beiden Platten in cm.

Neben dieser einfachen Anordnung kommen in der Hochspannungstechnik aber noch zahlreiche andere Konstruktionen vor, z. B. zwei konzentrische Kugeln, zwei konachsiale Zylinder, Zylinder gegenüber einer leitenden Platte, zwei parallele Zylinder usw. Es läßt sich nun zeigen, daß für alle diese Anordnungen ein gemeinsames Gesetz für die Durchschlagspannung gilt, das dem in Gleichung (1) angeschriebenen ähnlich ist und lautet:

$$P = \mathfrak{E} \cdot \alpha; \quad (2)$$

hierin bedeutet α eine „fiktive" Entfernung der Elektroden voneinander. Würden wir zwei Platten in der wahren Entfernung α voneinander anordnen, so würden wir dieselbe Durchschlagspannung erhalten, wie bei zwei beliebigen anderen Elektroden deren fiktive Entfernung α ist.

Wir können allgemein sagen: Das in Gleichung (2) angeschriebene Gesetz gilt für alle Hochspannungsanordnungen mit beliebigen Elektroden; bei Plattenelektroden ist dabei $\alpha = a$, also gleich dem wahren Abstand.

Man sieht leicht ein, daß bei allen anderen Anordnungen α in der Regel kleiner als der lichte Abstand a ist. Bei parallelen Platten befindet sich nämlich das Isoliermaterial in einem homogenen Feld, ist also in all seinen Schichten gleichmäßig beansprucht. Sobald auch nur eine der beiden Elektroden von der Plattenform abweicht, ist dies nicht mehr der Fall; die Beanspruchung ist dann nicht mehr in allen Schichten die gleiche, sie ist immer am stärksten in der nächsten Umgebung der am stärksten gekrümmten Elektrode. Das Isoliermaterial ist also nicht so gut ausgenutzt wie bei zwei parallelen Platten. Da α aber die Dicke des Isoliermaterials bei gleicher Beanspruchung in allen Schichten angibt, ist vorauszusehen, daß sich für die fiktive Entfernung der Elektroden ein kleinerer Wert ergeben muß als der wahre Abstand beträgt.

Das Verhältnis

$$\frac{\alpha}{a} = \eta \quad (3)$$

können wir demnach als ein Maß für die Ausnutzung des Isoliermaterials ansehen; wir nennen η schlechtweg „Ausnutzungsfaktor" des Isoliermaterials.

Gleichung (2) können wir jetzt in der Form schreiben:

$$P = \mathfrak{E} \cdot a \cdot \eta; \quad (4)$$

d. h. wir können die Durchschlagspannung irgendeiner Anordnung einfach so rechnen, als wenn wir eine Plattenanordnung vor uns hätten; wir multiplizieren also die Durchschlagfestigkeit des verwendeten Isoliermaterials mit dem Abstand a der Elektroden (Dicke des Isoliermaterials); die so erhaltene Durchschlagspannung



multiplizieren wir dann noch mit dem Ausnutzungsfaktor η der betreffenden Anordnung, der angibt, um wieviel schlechter die Anordnung gegenüber der Plattenanordnung ist

Bei parallelen Platten ist η natürlich gleich Eins.

Diese Rechnungsweise wäre wegen ihrer Einfachheit wohl ganz besonders für die Praxis sehr erwünscht. Es ist aber noch die Frage offen: Wie findet man den Ausnutzungsfaktor für die einzelnen Anordnungen? Mit der Beantwortung dieser Frage beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

2. Berechnung des Ausnutzungsfaktors. Bei einer großen Anzahl von Anordnungen läßt sich der Ausnutzungsfaktor berechnen, nämlich bei all den Anordnungen, deren Durchschlagsformel bekannt ist.

a) Zwei konzentrische Kugeln. Nach der Festigkeitslehre lautet die Formel für die Durchschlagspannung dieser Anordnung

$$P = \mathfrak{E} \cdot r \cdot \frac{R - r}{R}. \tag{5}$$

Die Bedeutung der einzelnen Buchstaben kann aus Bild 1 entnommen werden. Der lichte Abstand der beiden Elektroden (Dicke des Isoliermaterials) ist

$$a = R - r. \tag{6}$$

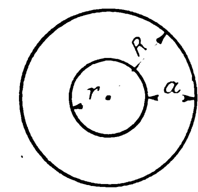


Bild 1.

Wir führen in die Gleichung einen Parameter p ein

$$p = \frac{r + a}{r}; \tag{7}$$

dann lautet die Gleichung (5):

$$P = \mathfrak{E} \cdot r \cdot \frac{p - 1}{p}. \tag{8}$$

Für diese Anordnung ist also der fiktive Abstand α

$$\alpha = r \frac{p - 1}{p}, \tag{9}$$

d. h. für alle Kugelanordnungen, welchen dasselbe p zukommt, ist der fiktive Abstand der beiden Elektroden eine lineare Funktion des Krümmungsradius der kleinen Kugel. Wählt man als Abszisse r und als Ordinate α, so erhält man ein Geradenbüschel mit dem gemeinsamen Schnittpunkt im Koordinatenanfangspunkt und dem Parameter p. Wählt man für die Koordinaten die logarithmische Einteilung, so wird das Geradenbüschel als System unter sich paralleler Geraden mit der Neigung von 45 Grad gegen die Achsen abgebildet.

Um den Ausnutzungsfaktor zu erhalten, haben wir Gleichung (9) durch den lichten Abstand a zu dividieren; wir schreiben für den lichten Abstand a

$$a = (r + a) - r, \tag{6'}$$

und erhalten dann für η

$$\eta = \frac{r}{(r + a) - r} \cdot \frac{p - 1}{p}. \tag{10}$$

Wir multiplizieren Zähler und Nenner des ersten Quotienten mit $\frac{1}{r}$ und erhalten

$$\eta = \frac{1}{p - 1} \cdot \frac{p - 1}{p} = \frac{1}{p}. \tag{11}$$

Der Ausnutzungsfaktor hängt also nur von p ab und ist bei allen Anordnungen mit demselben Verhältnis der Radien gleich.

Wir tragen η als Funktion von p auf, und zwar zweckmäßiger Weise in einem logarithmischen Koordinatensystem und erhalten eine Gerade, wie Bild 2 zeigt.

Die Berechnung der Durchschlagspannung ist nun sehr einfach. Soll z. B. die Durchschlagspannung der Kugelanordnung berechnet werden, deren r = 2 und R = 4 cm ist, so bilden wir

$$a = R - r = 2;$$

$$p = \frac{r + a}{r} = 2 \qquad (12)$$

Bild 2.

Für $p = 2$ ist $\eta = 0{,}5$. Ist die Durchschlagfestigkeit des Isoliermaterials beispielsweise gleich $100 \, \frac{kV}{cm}$, so ist die Durchschlagspannung P

$$P = 100 \cdot 2 \cdot 0{,}5 = 100 \, kV. \qquad (12')$$

Wenn auch die Berechnung der Durchschlagspannung bei dieser Anordnung nach der üblichen Formel (5) sehr einfach ist, so erkennt man doch, daß mit dem Ausnutzungsfaktor noch einfacher zu rechnen ist. Bei den folgenden Anordnungen tritt dies noch augenscheinlicher hervor.

b) Zwei konachsiale Zylinder. Nach der Festigkeitslehre ist die Durchschlagspannung dieser Anordnung



$$P = \mathfrak{E} \cdot r \cdot \lg n \frac{R}{r}. \tag{13}$$

Die Bedeutung der einzelnen Buchstaben möge aus Bild 1 entnommen werden, das auch die Spuren der beiden Zylinder darstellt.

Der lichte Abstand der Elektroden ist (Dicke des Isoliermaterials)

$$a = R - r. \tag{14}$$

Wir führen wieder den Parameter p ein

$$p = \frac{r + a}{r}; \tag{15}$$

Bild 3.

dann geht Gleichung (13) über in

$$P = \mathfrak{E} \cdot r \cdot \lg n\, p. \tag{16}$$

Die fiktive Entfernung α ist also

$$\alpha = r \lg n\, p. \tag{17}$$

Wir erhalten für α wieder eine Schar unter sich paralleler Geraden mit dem Parameter p und der Neigung von 45 Grad gegen die Achsen bei der Wahl eines logarithmischen Koordinatensystems. Dieses Geradensystem ist in Bild 3 dargestellt.

Um den Ausnutzungsfaktor zu erhalten, haben wir Gleichung (17) durch den lichten Abstand $a = (a + r) - r$ zu dividieren; also

$$\eta = \frac{r}{(a + r) - r} \lg n\, p, \tag{18}$$

und das ist

$$\eta = \frac{1}{p - 1} \lg n\, p. \tag{19}$$

Also auch hier ist der Ausnützungsfaktor lediglich vom Parameter p abhängig. In Bild 2 ist die Kurve für η eingetragen („Konzentrische Zylinder").

Wir sehen aus diesem Bild, daß beide Kurven bei $p = 1$ dem Wert $\eta = 1$ zulaufen; das ist auch leicht erklärlich. Je dünner nämlich das Isoliermaterial ist, um so mehr nähert sich die Form des Feldes dem homogenen Feld, wo $\eta = 1$ ist.

c) Zwei gleich große parallele Zylinder (auch „zwei symmetrische Zylinder" genannt). Die Spuren der beiden Zylinder seien in Bild 4 dargestellt. Die Formel für die Durchschlagspannung lautet:

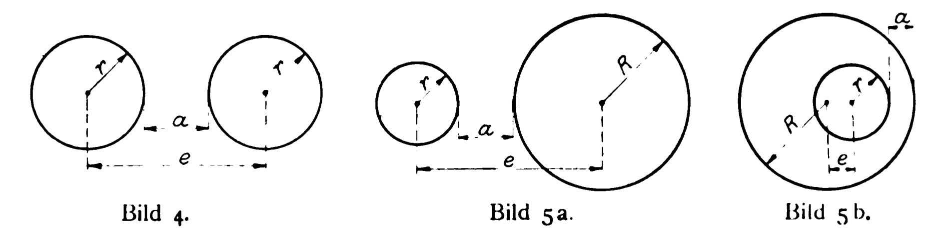


Bild 4. Bild 5a. Bild 5b.

$$P = \mathfrak{E} \cdot r \cdot \frac{2 \lg n \dfrac{\sqrt{e^2 - 4r^2} + e - 2r}{\sqrt{e^2 - 4r^2} - e + 2r}}{\sqrt{\dfrac{e + 2r}{e - 2r}}} = \mathfrak{E} \cdot r \cdot z. \tag{20}$$

Der Ausdruck für z ist dimensionslos. Wir führen den Parameter p ein

$$p = \frac{r + a}{r}; \tag{21}$$

für e können wir schreiben

$$e = a + 2r. \tag{22}$$

z in Gleichung (20) erhält dann die Form

$$z = \frac{2 \lg n \dfrac{1}{p} (p^2 + p - 1)}{(p + 1)\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2 + p - 1}\right)}; \tag{23}$$

und α wird

$$\alpha = r \cdot z. \tag{24}$$

Für α erhalten wir also wieder das bekannte Geradensystem.

Um den Ausnutzungsfaktor zu erhalten, dividieren wir Gleichung (24) durch den lichten Abstand der Elektroden $a = (r + a) - r$ und erhalten

$$\eta = \frac{2 \lg n \dfrac{1}{p} (p^2 + p - 1)}{(p^2 - 1)\left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^2 + p - 1}\right)}; \tag{25}$$

also wieder einen Ausdruck, der nur von p abhängt. Die Kurve für η ist in Bild 2 eingetragen („zwei symmetrische Zylinder").

d) Zwei unsymmetrische Zylinder. Die Anordnungen „zwei unsymmetrische Zylinder„ sind in Bild 5a, b dargestellt; die Bezeichnungen mögen aus diesen Bildern ersehen werden. Die Formel für die Durchschlagspannungen dieser beiden Anordnungen sind wesentlich komplizierter als die bis jetzt angeschriebenen; sie haben aber wie Gleichung (20) die Form

$$P = \mathfrak{E} \cdot r \cdot z'; \tag{26}$$

z' ist auch hier eine unbenannte Zahl. Wir führen hier zwei Parameter ein, nämlich

$$p = \frac{r + a}{r}; \quad \varrho = \frac{R}{r}. \tag{27}$$

Wir müssen hier zwei Parameter einführen, da durch den Radius r und die Entfernung a allein die Anordnung nicht mehr definiert ist.

Für die fiktive Entfernung α erhalten wir wie früher

$$\alpha = r \cdot z'. \tag{28}$$

Es ergeben sich also für α wieder Geradensysteme, und zwar für jeden Wert von ϱ ein System mit dem Parameter p.

Wir können auch hier die Ausnutzungsfaktoren η berechnen, indem wir Gleichung (28) durch den Abstand $a = (r + a) - r$ dividieren. Wir erhalten

$$\eta = \frac{z'}{p - 1}. \tag{29}$$

Auch hier ist η nur von den Parametern abhängig, nicht aber von den Radien.

Für jedes ϱ ergibt sich eine Kurve für η, wenn wir wie bisher p als Abszisse wählen. Auf die Wiedergabe dieser Kurven soll hier verzichtet werden.

e) Zwei symmetrische Kugeln. Die Spuren der beiden Kugeln mögen durch Bild 4 dargestellt werden; auch die dort eingeschriebenen Buchstaben behalten ihre Gültigkeit. Die Gleichung für die Durchschlagspannung dieser Anordnung ist nicht bekannt. Herr Dr. Estorff hat aber die Größe der Feldstärke an den Kugeln näherungsweise berechnet und für P = 100 Volt tabellarisch zusammengestellt. Aus diesen Tabellen können wir die fiktiven Entfernungen α ausrechnen, indem wir 100 Volt durch die in der Tabelle angegebene Feldstärke dividieren. Die so berechneten Werte von α ordnen wir derart, daß wir alle Werte mit gleichem Parameter p

$$p = \frac{r + a}{r} \tag{30}$$

zusammennehmen. Tragen wir diese Werte als Funktion des Kugelradius r auf, so erhalten wir wieder im logarithmischen System eine Schar unter sich paralleler Geraden mit der Neigung von 45 Grad gegen die Achsen; Parameter der Kurvenschar ist wieder p.

Will man den Ausnutzungsfaktor η berechnen, so bildet man

$$\eta = \frac{z''}{p - 1}, \tag{31}$$

wobei für z eingesetzt wird

$$z'' = \frac{P}{\mathfrak{E} \cdot r}. \tag{32}$$

Da P, $\mathfrak{E}$ und r in der Estorffschen Tabelle angegeben sind, können die Werte von η leicht berechnet werden; wir erhalten die in Bild 2 eingetragene Kurve („Zwei symmetrische Kugeln").



3. Experimentelle Ermittlung des Ausnutzungsfaktors. In der Hochspannungstechnik kommen gelegentlich auch Anordnungen vor, deren Durchschlagsformel auch nicht näherungsweise bekannt ist. Es sei hier beispielsweise an die Zylinderwulste von Durchführungen erinnert (Bild 7). Um die Durchschlagspannung vom Rand des äußeren Zylinders gegen den inneren ermitteln zu können, müßten uns die Überschlagskurven zwischen Kreisringen mit konachsialen Stäben nach Bild 6 gegeben sein. Die Anordnung: Kreisring mit konachsialem Stab kommt in der Technik auch bei den Freileitungsisolatoren vor. Dort ist der Kreisring der Drahtbund und der konachsiale Stab die Isolatorstütze. In der Literatur sind hierüber keine Angaben zu finden; der Verfasser hat es deshalb unternommen, diese Überschlagskurven zu ermitteln. Da ihm aber keine geeigneten Ringe zur Verfügung standen, wurden die Versuche an senkrecht gekreuzten Stäben in der Anordnung nach Bild 8 angestellt. Mit Hilfe einiger zylindrischer Ringe wurde nachträglich kontrolliert, wie groß der Unterschied zwischen senkrecht gekreuzten Stäben und der Ringordnung ist. In den Bildern 9, 10, 11, 12, 13 und 14 sind die Versuchsergebnisse dargestellt, und zwar ist jeweils die Durchschlagspannung

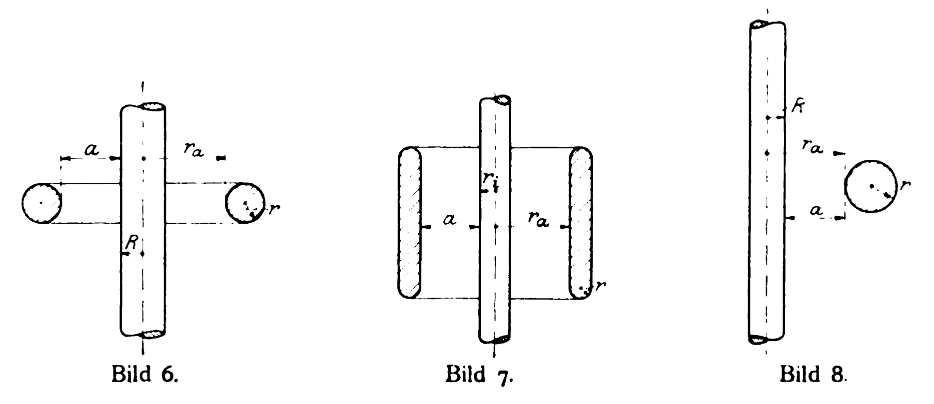


Bild 6. Bild 7. Bild 8.

als Funktion des lichten Abstandes a der beiden Stäbe aufgetragen. Der Durchmesser R eines der beiden Stäbe wurde konstant gehalten, und der Durchmesser r des anderen Stabes wurde variiert. Die Durchschlagspannungen der Ringanordnungen sind durch zwei konzentrische Kreise angedeutet; sie müßten alle auf den Kurven mit dem Parameter $r = 0{,}5$ cm liegen, was im großen und ganzen ziemlich genau zutrifft; bekanntlich sind bei solchen Versuchen Beobachtungsfehler sehr schwer zu vermeiden. Die Versuche selbst wurden durch meine beiden Mitarbeiter, die Herren Dipl.-Ing. Wörner und Ing. K. Merkl, ausgeführt.

Es ist nun von Interesse zu untersuchen, welche Kurven sich ergeben, wenn wir die Versuchsresultate in ähnlicher Weise auswerten, wie wir dies bei den anderen Anordnungen gemacht haben. Es wurde deshalb jeweils die durch die Versuche ermittelte Durchschlagspannung P durch die Feldstärke $\mathfrak{E}$ dividiert. Dabei wurden für $\mathfrak{E}$ die für konachsiale Zylinderelektroden geltenden Werte der Durchschlagfestigkeit der Luft als Funktion von r eingesetzt; dies ist zwar nicht streng richtig; denn da bei gekreuzten Stäben ein anders gestaltetes Feld vorhanden ist, hat die Durchschlagfestigkeit der Luft sicherlich andere Werte als bei konachsialen Zylindern. Immerhin aber dürfte der gemachte Fehler nicht sehr erheblich sein.

Wir tragen nunmehr die Werte von α aller derjenigen Anordnungen, welche dieselben Parameter

$$\varrho = \frac{R}{r}$$

$$p = \frac{r + a}{r} \qquad (33)$$

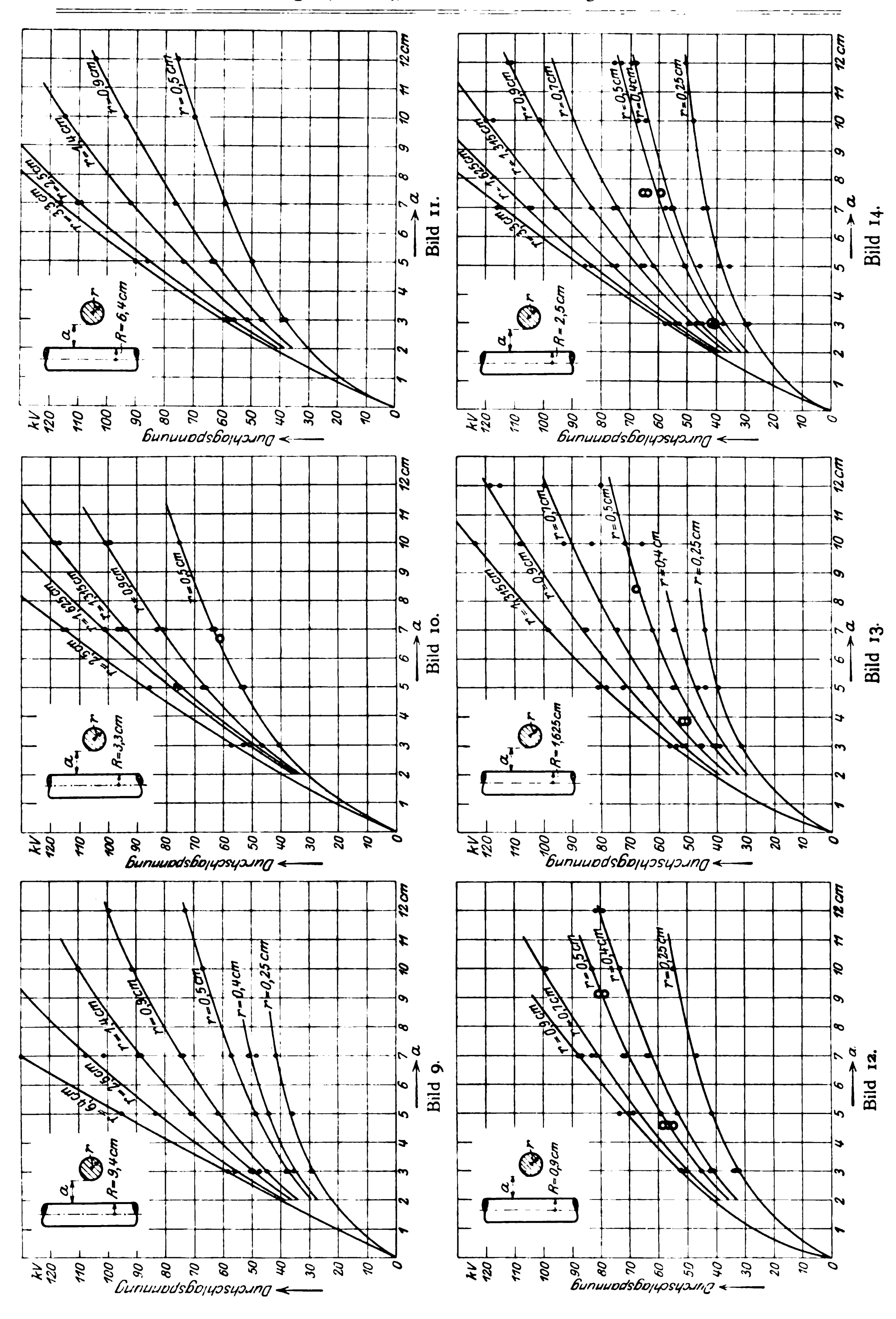


Bild 9.

Bild 10.

Bild 11.

Bild 12.

Bild 13.

Bild 14.

haben, abhängig vom Radius r des kleineren Zylinders in einem logarithmischen Koordinatensystem auf. Es zeigt sich dann, daß man auch hier wieder Geradenscharen erhält, und zwar für jedes ϱ eine Schar mit dem Parameter p. Die einzelnen Geraden sind unter sich parallel und haben eine Neigung von 45 Grad gegen die Achsen. In Bild 15 ist als Beispiel das Geradensystem für $\varrho = 2$, das aus den Versuchen berechnet wurde, dargestellt; die aufgenommenen Punkte sind eingetragen.

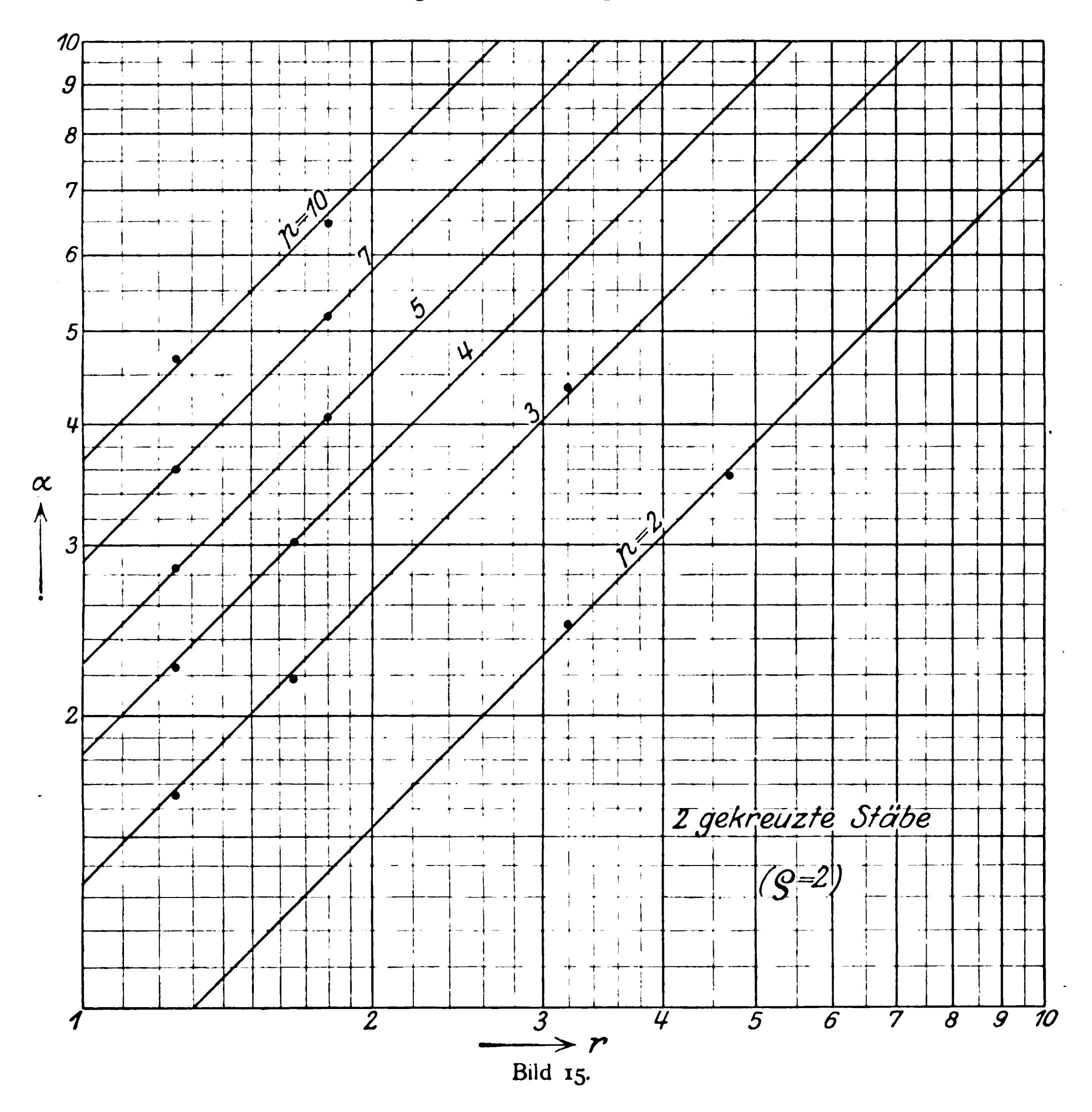


Bild 15.

In gleicher Weise wie vorher bei den Kugeln können wir auch hier die Ausnutzungsfaktoren berechnen. Es zeigt sich, daß beispielsweise die Kurve von η für $\varrho = 1$ fast genau mit der zweier symmetrischer Zylinder zusammenfällt, wie aus Bild 2 zu ersehen ist.

4. Schluß. Das Ergebnis unserer Betrachtungen können wir wie folgt zusammenfassen:

Wir unterscheiden in der Hochspannungstechnik bei den Zwei-Elektrodenanordnungen zwei große Gruppen:

a) symmetrische Anordnungen (konzentrische. konachsiale Elektroden, gleiche Elektroden nebeneinander);

b) unsymmetrische Anordnungen (exzentrische, anachsiale Elektroden, ungleiche Elektroden nebeneinander).

Zur Beschreibung der geometrischen Konfiguration der Anordnungen brauchen wir bei der Gruppe a nur einen Parameter p, der das Verhältnis angibt zwischen dem Abstand des Mittelpunktes der Elektrode mit dem kleinen Krümmungsradius r von der Oberfläche der Elektrode mit dem größeren Krümmungsradius R (also r + a) zum Krümmungsradius der Elektrode mit dem kleinen Krümmungsradius r (also $p = \frac{r+a}{r}$).

Zur Beschreibung der geometrischen Konfiguration der Anordnungen der Gruppe b brauchen wir zwei Parameter p und ϱ; p hat die gleiche Bedeutung wie vorher und ϱ ist das Verhältnis der Krümmungsradien der beiden Elektroden (also $\varrho = \frac{R}{r}$).

Bei allen Anordnungen der Gruppen a und b ist der fiktive Abstand α der beiden Elektroden proportional dem kleinen Krümmungsradius r; Parameter der Geradenschar ist p. Bei den Anordnungen der Gruppe b erhalten wir für jeden Wert von ϱ eine solche Geradenschar.

Bei allen Anordnungen der Gruppe a und b ist der Ausnützungsfaktor lediglich vom Parameter p bzw. von p und ϱ abhängig, dagegen unabhängig von der Größe der Krümmungsradien selbst.

Die Gültigkeit dieser Gesetze ist auch für solche Anordnungen nachgewiesen, deren Überschlagsformel nicht bekannt ist, z. B. für zwei symmetrische Kugeln, zwei unsymmetrische Kugeln, zwei gekreuzte Stäbe. Damit ist es möglich, die Versuchsergebnisse an irgendwie gestalteten Elektroden zu ordnen und mit wenigen Versuchen die Gesetze der Anordnung zu finden.

Darüber hinaus gestatten die gewonnenen Erkenntnisse, die Durchschlagfestigkeiten jener Isoliermaterialien, deren Bruchfeldstärken von der Form des Feldes (Krümmungradius) abhängt, zu ermitteln. Man geht dabei so vor, daß man die zu untersuchende Anordnung mit einem Isoliermaterial umgibt, dessen Durchschlagfestigkeit eine Materialkonstante und bekannt ist. Damit erhält man die fiktiven Entfernungen und Ausnutzungsfaktoren der Anordnung. Dann stellt man die Durchschlagversuche in dem Isoliermittel an, dessen Durchschlagfestigkeit man ermitteln will, und rechnet mit Hilfe der zuerst gewonnenen Werte von α und η die Bruchfeldstärken als Funktion der Krümmungsradien aus. So könnte man also z. B. die Durchschlagfestigkeit der Luft an Kugeln ermitteln, indem man die Kugeln zuerst unter Öl überschlagen läßt und α und η berechnet und dann in Luft und $\mathfrak{E}$ berechnet.

Für den praktisch arbeitenden Ingenieur mag es willkommen sein, daß alle Festigkeitsrechnungen durch Einführung der Ausnutzungsfaktoren auf die Plattenanordnung zurückgeführt sind. Es ist beabsichtigt in einer besonderen Schrift die Ausnutzungsfaktoren aller möglichen in der Hochspannungstechnik vorkommenden Anordnungen zusammenzustellen und an Hand von Beispielen den Gebrauch der Tabellen zu erläutern.



Archiv für Elektrotechnik

XI. Band. 2. Heft 1922.

Die Theorie des Kappschen Vibrators.

Von

Hermann Düll, München.

Einleitung: Die Drehstrommotoren weisen, besonders wenn sie nicht voll belastet sind, einen $\cos \varphi$ auf, welcher wesentlich kleiner als 1 ist; die nachteiligen Einflüsse eines schlechten Leistungsfaktors: unvollständige Ausnützung des Leitungsnetzes und der Generatoren der Zentrale sind bekannt. Aber nicht nur für den Erzeuger, sondern auch für den Verbraucher der elektrischen Energie kann ein schlechter Leistungsfaktor von Nachteil sein, wenn ihm z. B. bei Rationierung der elektrischen Antriebskraft nur eine bestimmte Strommenge zugeteilt ist: eine Verbesserung des $\cos \varphi$ der angeschlossenen Motoren ist für ihn gleichbedeutend mit der Zuweisung einer größeren Leistung.

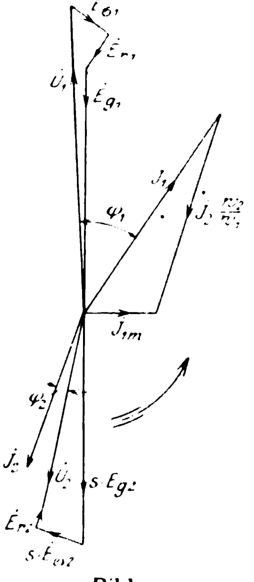


Bild 1.

Die Verbesserung des Leistungsfaktors einer ganzen Anlage läßt sich wie bekannt damit erreichen, daß man Synchronmotoren, welche übererregt werden und dadurch voreilenden Strom aufnehmen, auf das Netz schaltet; auch durch Verwendung von statischen Kondensatoren ist es möglich eine ähnliche Wirkung zu erzielen; die Erfahrungen der Praxis haben aber gezeigt[1]), daß die Phasenverbesserung durch Synchronmotoren und Kondensatoren nicht immer wirtschaftlich ist; man ist daher zu einer anderen Art der Verbesserung der Phasenverschiebung übergegangen, welche darin besteht, daß man den $\cos \varphi$ der eingeschalteten Motoren selbst verbessert und dadurch den Leistungsfaktor der Anlage günstiger gestaltet.

Wie aus dem Vektordiagramm[2]) des Drehstrommotors, Bild 1, ersichtlich ist, kann eine Verbesserung des $\cos \varphi_1$ dadurch erreicht werden, daß der Rotorstrom J_2 einen Teil oder den ganzen Magnetisierungsstrom $\dot{I}_{1m}$ aufbringt, d. h. daß I_2[3]) gegenüber $s \cdot \dot{E}g_2$ voreilt; diese zeitliche Voreilung des Stromes I_2 läßt sich durch Einschaltung eines Apparates erzielen, welcher eine kapazitive Belastung für den sekundären Stromkreis bildet. Es gibt verschiedene Lösungen dieses Problems, so die von Leblanc[4]), Walker[5]), Scherbius[6]), Kapp[7]) angegebenen Konstruktionen (Phasenkompensatoren oder Phasenschieber).

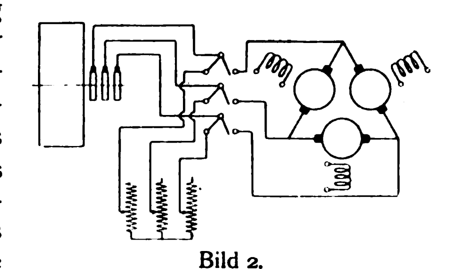


Bild 2.

---

1) Vgl. Kopp, ETZ. 1920 S. 772 ff.

2) Vgl. Starkstromtechnik v. Rziha u. Seidener, Abschn. VII E.

3) Der vektorielle Charakter der Wechselstromgrößen werde dadurch bezeichnet, daß man einen Punkt über den betreffenden Buchstaben setzt.

4) Eclairage Electrique Bd. 20, 1899 S. 171.

5) ETZ. 1909 S. 1260, ETZ. 1913 S. 832.

6) ETZ. 1912 S. 1079, ETZ. 1913 S. 837, ETZ. 1915 S. 299.

7) ETZ. 1912 S. 778, ETZ 1913 S. 931, ETZ. 1914 S. 713 u. 981, ETZ. 1916 S. 625. ETZ. 1919 S. 405.

Im nachstehenden soll die genaue Theorie für den von Kapp erdachten Phasenkompensator, den sog. Vibrator, erbracht werden. Dieser Phasenkompensator, dessen grundsätzliche Schaltung sich aus Bild 2 ergibt, besteht bei Drehstrom aus drei Gleichstromankern, welche vom Rotorstrom des Asynchronmotors durchflossen werden; jeder der drei Anker schwingt in einem konstant erregten Gleichstromfeld, wodurch eine dem Läuferstrom zeitlich um $\frac{\pi}{2}$ voreilende EMK im Rotorkreis induziert wird.

I. Die im Phasenkompensator induzierten Spannungen nach Größe und Richtung.

1. Die EMK der Drehung Ed_3.

Es bezeichne am Vibrator:

R_3 cm den Ankerradius eines Vibratorankers,
L_3 cm die Ankereisenbreite eines Vibratorankers,
$\mathfrak{H}_{3m}$ die mittlere Feldstärke im Luftraum,
$\mathfrak{Z}_3$ die Kraftlinienzahl pro Pol,
$m_3 = P \cdot R_3$ das auf den Anker ausgeübte Drehmoment (Momentanwert),
m_{3max} den Maximalwert von m_3,
p_3 die Polpaarzahl pro Anker,
i_3 den Strom pro Anker (Momentanwert),
i_{3max} den Maximalwert von i_3,
$s_3 b_3$ die Leiterzahl pro Anker,
$2a_3$ die Zahl der parallelen Stromzweige pro Anker.

Befindet sich ein Leiter von der Länge L cm in einem Feld von der Stärke $\mathfrak{H}$ Gauß und fließt durch den Leiter ein Strom i Amp., so ist die Kraft P der Ablenkung nach Biot-Savart:

$$P = i \cdot L \cdot \mathfrak{H} \cdot \frac{1}{g} \cdot 10^{-6}\,\text{kg}$$

In Anwendung dieses Satzes ergibt sich für den Vibratoranker ein Moment m_3 von der Größe:

$$m_3 = P \cdot R_3 = \frac{i_3}{2a_3} L_3 \cdot s_3 \cdot b_3 \cdot \mathfrak{H}_{3m} \cdot \frac{1}{g} \cdot R_3 \cdot 10^{-8} \quad \text{mkg}$$

und nach Einführung der Beziehung:

$$\mathfrak{Z}_3 = \frac{R_3 \pi}{p_3} \cdot L_3 \cdot \mathfrak{H}_{3m}$$

$$m_3 = \frac{p_3}{2g\pi} \cdot \frac{s_3 b_3}{a_3} \cdot \mathfrak{Z}_3 \cdot i_3 \cdot 10^{-8} \qquad \text{mkg.}$$

Setzt man in erster Annäherung die mechanische Reibung der Vibratoranker $= 0$ — eine Vernachlässigung, welche infolge der Verwendung von Kugellagern als zulässig erscheint, aber auch die Vernachlässigung der Bürstenreibung und Luftreibung einschließt — so besteht folgende Gleichung für die drehende bzw. oszillierende Bewegung:

$$m_3 = \Theta \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Theta \cdot \frac{du}{dt}$$

wenn Θ das Trägheitsmoment eines Vibratorankers und u dessen Winkelgeschwindigkeit, d. h. den in der Zeiteinheit zurückgelegten Winkel φ, bedeutet. Zwischen dem Augenblickswert m_3 und dem Maximalwert m_{3max} des Drehmoments besteht die Beziehung:

$$m_3 = m_{3max} \cdot \sin \omega t$$

dabei ist:

$$m_{3max} = \frac{p_3}{2\pi \cdot g} \cdot \frac{s_3 b_3}{a_3} \cdot \mathfrak{Z}_3 \cdot i_{3max} \cdot 10^{-8}.$$

Auf Grund dieser beiden Gleichungen ergibt sich:

$$u = \int \frac{m_3}{\Theta} dt = - \frac{m_{3max}}{\Theta} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t.$$

Ist n_3 der Momentanwert der Tourenzahl des Vibratorankers pro Minute, so besteht zwischen u und n_3 die Relation:

$$u = 2\pi \cdot \frac{n_3}{60}$$

und:

$$\frac{n_3}{60} = - \frac{1}{2\pi} \frac{m_{3max}}{\Theta} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega t.$$

Die durch die oszillierende Bewegung des Vibratorankers in diesem induzierte Spannung e_{d3} berechnet sich wie die in dem Anker einer Gleichstrommaschine induzierte EMK zu:

$$e_{d3} = \mathfrak{Z}_3 p_3 \cdot \frac{s_3 b_3}{a_3} \cdot \frac{n_3}{60} \cdot 10^{-8} \text{ Volt.}$$

Führt man die oben angegebenen Werte für $\frac{n_3}{60}$ und m_{3max} ein und setzt $\omega = 2\pi \cdot \nu_1$, so ist:

$$e_{d3} = - \mathfrak{Z}_3^2 p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi^3 \cdot g \cdot \Theta} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot i_{3max} \cdot 10^{-16} \cdot \cos \omega t.$$

Die Gleichung sagt aus, daß die e_{d3} gegenüber i_3 um $\frac{\pi}{2}$ zeitlich in der Phase verschoben ist, und zwar ergibt eine kurze Überlegung, daß die e_{d3} dem Strome i_3 um $\frac{\pi}{2}$ voreilt.

Geht man zu den Effektivwerten E_{d3} und I_3 über und kennzeichnet die Voreilung der Spannung $\dot{E}_{d3}$ gegenüber dem Strome I_3 durch Hinzufügen des Faktors $-j = -\sqrt{-1}$, so ist:

$$\dot{E}_{d3} = -j \cdot \dot{I}_3 \cdot \mathfrak{Z}_3^2 p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi^3 \cdot g \cdot \Theta} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16} \text{ Volt}$$

oder:

$$\dot{E}_{d3} = -j\, c_3 \dot{J}_3$$

dabei ist:

$$c_3 = \mathfrak{Z}_3^2 \cdot p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{8\pi^3 \cdot g \cdot \Theta} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16}.$$

Führt man an Stelle des Trägheitsmoments Θ das Schwungmoment GD^2 (m^2kg) ein, so ergibt sich für die Konstante:

$$c_3 = \mathfrak{Z}_3^2 \cdot p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 GD^2} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16}.$$

Bisher haben wir mit der Größe $\omega = \frac{2\pi}{T_1} = 2\pi\nu_1$, also mit der Periodenzahl ν_1, gerechnet; da aber die Periodenzahl des Rotorstromes $\nu_1 - \nu_2$ ist, so ist die tatsächlich induzierte Spannung nicht E_{d3}, sondern — wenn mit $\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1} = s$ die Schlüpfung bezeichnet wird —

$$\frac{1}{s} \cdot \dot{E}_{d3} = -j \cdot \frac{c_3}{s} \cdot \dot{I}_3 \text{ Volt.}$$

Außer dieser EMK der Drehung treten noch weitere EMKe auf.

2. Die EMK der Selbstinduktion E_{33} des Vibratorankers.

Ist $\mathfrak{H}_x$ die Feldstärke im Luftraum an der Stelle x und ν_1 die Periodenzahl des zugeführten Wechselstromes, so ist die von der Kraftröhre

5*

$$d\mathfrak{Z}_x = L_3 \cdot dx \cdot \mathfrak{H}_x$$

induzierte EMK dE_{33}:

$$dE_{33} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \cdot \nu_1 \cdot d\mathfrak{Z}_x \cdot w_x \cdot 2p_3 \cdot 10^{-8} \quad \text{Volt}$$

wenn w_x die mit der Kraftröhre $d\mathfrak{Z}_x$ verketteten Windungen bezeichnet. Ist δ_3'' der reduzierte einseitige Luftraum des Vibrators in cm, so besteht zwischen der Feldstärke $\mathfrak{H}_x$ und der Amperewindungszahl $I_3 \cdot w_x$ die Beziehung:

$$\mathfrak{H}_x = \frac{1}{2\delta_3''} \cdot \frac{4\pi}{10} \cdot \sqrt{2} \cdot I_3 \cdot w_x$$

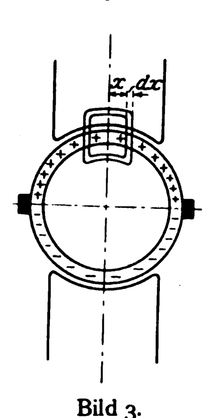


Bild 3.

Für eine Gleichstromwicklung des Ankers gilt, wenn AS_3 die Amperleiterzahl pro cm Ankerumfang ist:

$$I_3 \cdot w_x = AS_3 \cdot 2x = \frac{J_3}{2\,a_3} \cdot \frac{s_3\,b_3}{2\,R_3\,\pi}\,2x$$

und bei Einführung des Wertes: $w_3 = \frac{s_3\,b_3}{8a_3\,p_3}$

$$I_3 \cdot w_x = I_3 \cdot w_3 \cdot \frac{4\,p_3\,x}{R_3 \cdot \pi}.$$

Setzt man die Werte für $d\mathfrak{Z}_x$, $\mathfrak{H}_x$ und $I_3 w_x$ in die Gleichung für dE_{33} ein und bezeichnet man mit $tp_3 = \frac{R_3\pi}{p_3}$ die Polteilung, mit α_3 den Polbedeckungsfaktor des Vibrators, so ergibt sich:

$$E_{33} = \frac{128\pi^2}{10} \cdot \frac{1}{tp_3^2} \cdot p_3 \cdot \nu_1 \cdot \frac{L_3}{\delta_3''} \cdot I_3 \cdot w_3^2 \cdot 10^{-8} \int_0^{\frac{\alpha_3 tp_3}{2}} x^2\,dx$$

und:

$$E_{33} = \frac{16\pi^3}{10} \cdot \frac{R_3\,L_3}{\delta_3''} \cdot \nu_1 \cdot w_3^2 \cdot I_3 \cdot \frac{\alpha_3^3}{3} \cdot 10^{-8} \quad \text{Volt.}$$

Führt man ein:

$$k_{33} = \frac{16\pi^3}{10} \cdot \frac{R_3\,L_3}{\delta_3''}\,\nu_1 \cdot w_3^2 \cdot \frac{\alpha_3^3}{3} \cdot 10^{-8}$$

und schreibt die Gleichung für E_{33} als Vektorgleichung, so ist:

$$\dot{E}_{33} = j \cdot k_{33} \cdot \dot{I}_3 \quad \text{Volt.}$$

Hier bedeutet das Hinzufügen des Faktors $+j = \sqrt{-1}$ entsprechend der früheren Festsetzung eine Nacheilung des Spannung $\dot{E}_{33}$ gegenüber dem Strom $\dot{I}_3$ um $\frac{\pi}{2}$.

3. Spannungsabfall durch den Ohmschen Widerstand und durch das Streufeld.

Infolge des Ohmschen Widerstandes des Vibratorankers und infolge des Streufeldes treten Spannungsabfälle ein, zu deren Kompensation folgende EMKe erforderlich sind:

$$\dot{E}_{r3} = -\dot{I}_3\,r_3 \quad \text{Volt}$$
$$\dot{E}_{\sigma 3} = jk_{\sigma 3} \cdot \dot{I}_3 \quad ,,$$

dabei bedeutet r_3 den Ohmschen Widerstand des Vibratorankers [einschließlich Bürstenübergangswiderstand]; $k_{\sigma 3} = \sigma_3 \cdot k_{33}$ bezeichnet die Streureaktanz des Vibratorankers, der Streuungskoeffizient σ_3 kann annähernd durch die Beziehung bestimmt werden:

$$\sigma_3 = 2 \cdot \frac{\delta_3''}{R_3} \cdot p_3.$$

Dem Vibrator wird nun aber ein Strom zugeführt, welcher die Periodenzahl $\nu_1 - \nu_2$ hat; daher sind die EMKe, welche den Faktor ν_1 enthalten, noch mit $s = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1}$ zu multiplizieren um die wirklich induzierten Spannungswerte zu erhalten, also:

$$s \cdot \dot{E}_{33} = j \cdot s \cdot k_{33} \cdot \dot{I}_3 \quad \text{Volt}$$
$$s \cdot \dot{E}_{\sigma 3} = j \cdot s \cdot k_{\sigma 3} \cdot \dot{I}_3 \quad \text{,, .}$$

II. Das Vektordiagramm des Drehstrommotors mit Phasenkompensator.

Um das Problem nicht zu weitläufig zu gestalten, seien nachstehende Annahmen getroffen: Der Eisenwiderstand wird als unabhängig von den auftretenden Induktionen, also als konstant betrachtet, die Eisenverluste werden vernachlässigt, das erzeugte Feld ist daher in Phase mit dem Magnetisierungsstrom. Es bezeichne nun beim Drehstrommotor[1]):

I_{1m} den Effektivwert des Magnetisierungsstromes einer Phase in Amp.,
I_1, I_2 den Effektivwert des Stromes einer Phase der primären bzw. sekundären Wicklung in Amp.,
w_1, w_2 die effektiven Windungszahlen für einen Pol und Phase der primären bzw: sekundären Wicklung,
k_{11} die Reaktanz einer Phase der primären Wicklung bei ν_1 Perioden,
k_{12} die Wechselreaktanz zwischen der primären und sekundären Wicklung bei ν_1 Perioden,
k_{22} die Reaktanz einer Phase der sekundären Wicklung bei ν_1 Perioden,
$k_{\sigma 1} = \sigma_1 \cdot k_{11}$ die Streureaktanz einer Phase der primären Wicklung bei ν_1 Perioden,
$k_{\sigma 2} = \sigma_2 \cdot k_{22}$ die Streureaktanz einer Phase der sekundären Wicklung be ν_1 Perioden,
σ_1, σ_2 die Streuungskoeffizienten der primären bzw. der sekundären Wicklung,
r_1, r_2 die Ohmschen Widerstände pro Phase der primären bzw. der sekundären Wicklung,
U_1, U_2 den Effektivwert der primären bzw. sekundären Phasenspannung in Volt,
Eg_1, Eg_2 den Effektivwert der EMK in einer Phase, welche vom gemeinsamen Feld in der primären bzw. sekundären Wicklung induziert wird, in Volt,
$E_{\sigma 1}$, $E_{\sigma 2}$ und E_{r1}, E_{r2} die EMKe, welche zur Kompensation der Spannungsabfälle infolge des Streufeldes und des Ohmschen Widerstandes der primären bzw. sekundären Wicklung erforderlich sind, in Volt.

Für den Drehstrommotor gelten folgende Gleichungen:

$$\dot{I}_{1m} \cdot w_1 = \dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2 \tag{I}$$
$$\dot{U}_1 + \dot{E}_{g1} + \dot{E}_{\sigma 1} + \dot{E}_{r1} = 0, \tag{II}$$
$$\dot{U}_2 = s \cdot \dot{E}_{g2} + s \cdot \dot{E}_{\sigma 2} + \dot{E}_{r2} \tag{III}$$

Auf Grund der Beziehungen:

$$\dot{E}_{g1} = j\, k_{11} \cdot \dot{I}_{1m} \qquad \dot{E}_{g2} = j\, k_{12} \cdot \dot{I}_{1m}$$
$$\dot{E}_{\sigma 1} = j \cdot k_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 \qquad \dot{E}_{\sigma 2} = j \cdot k_{\sigma 2} \cdot \dot{I}_2$$
$$\dot{E}_{r1} = - r_1 \dot{I}_1 \qquad \dot{E}_{r2} = - r_2 . \dot{I}_2$$

ergeben sich durch Einführung der entsprechenden Ströme:

$$\dot{U}_1 + jk_{11} \cdot \dot{I}_{1m} + jk_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 - r_1 \dot{I}_1 = 0;$$
$$\dot{U}_2 = j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_{2m} + j \cdot s \cdot k_{\sigma 2} \cdot \dot{I}_2 - r_2 \dot{I}_2.$$

[1]) Vgl. Starkstromtechnik Abschnitt VII E.

Dem Vibrator wird die Klemmenspannung $\dot{U}_3$ zugeführt, welche den im Vibratoranker auftretenden EMKen das Gleichgewicht hält; damit ergibt sich die Bedingungsgleichung:

$$\dot{U}_3 + \frac{1}{s} \cdot \dot{E}_{d3} + s \cdot \dot{E}_{33} + s \cdot \dot{E}_{\sigma 3} + \dot{E}_{r3} = 0.$$

Faßt man die beiden EMKe $s \cdot \dot{E}_{33}$ und $s \cdot \dot{E}_{\sigma 3}$ zusammen zu:

$$s(\dot{E}_{33} + \dot{E}_{\sigma 3}) = s \cdot \dot{E}_3$$

oder

$$s \cdot \dot{E}_3 = j \cdot s \cdot \dot{I}_3 (k_{33} + k_{\sigma 3}) = j\, s \cdot k_3 \cdot \dot{I}_3$$

so ist

$$\dot{U}_3 + \frac{1}{s} \cdot \dot{E}_{d3} + s \cdot \dot{E}_3 + \dot{E}_{r3} = 0; \qquad \text{(IV)}$$

und nach Einführung des Stromes $\dot{J}_3$:

$$\dot{U}_3 - j \cdot \frac{1}{s} \cdot c_3\, \dot{I}_3 + j \cdot s \cdot k_3\, \dot{I}_3 - r_3\, \dot{I}_3 = 0.$$

Um eine Beziehung zwischen $\dot{U}_3$ und $\dot{U}_2$ bzw. $\dot{I}_3$ und $\dot{I}_2$ herstellen zu können, müssen wir eine Annahme über die Schaltung der Rotorwicklung und der Vibratoranker treffen; es seien die Rotorwicklung und die drei Vibratoranker in Dreieck geschaltet, ein Fall, der häufig vorkommt; es ist dann

$$\dot{U}_3 = \dot{U}_2 \quad \text{und} \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_2.$$

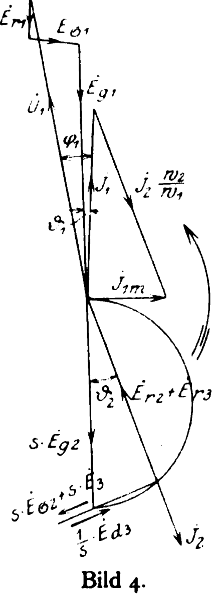


Bild 4.

Aus Gleichung (III) und (IV) ergibt sich damit:

$$j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_{1m} + j \cdot s \cdot k_{\sigma 2} \cdot \dot{I}_2 - r_2\, \dot{I}_2 - j \cdot \frac{1}{s} \cdot c_3 \cdot \dot{I}_2 + j \cdot s \cdot k_3 \cdot \dot{I}_2 - r_3\, \dot{I}_2 = 0.$$

oder:

$$j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_{1m} - j\, \dot{I}_2 \left\{ \frac{c_3}{s} - s(k_3 + k_{\sigma 2}) \right\} - (r_2 + r_3) \cdot \dot{I}_2 = 0. \qquad \text{(V)}$$

Aus Gleichung (I), (II), (V) ergibt sich nunmehr das Vektordiagramm für den Drehstrommotor mit Vibrator. Bei der Konstruktion des Diagrammes für einen bestimmten Wert der Schlüpfung s geht man zweckmäßig von einem beliebig angenommenen Wert I_2 aus und zeichnet das sekundäre Spannungsdiagramm; damit ist die Richtung von $\dot{I}_2$ festgelegt und nunmehr kann das Stromdiagramm und dann das primäre Spannungsdiagramm dargestellt werden. Als Schlußlinie zu $\dot{E}_{g1}$, $\dot{E}_{\sigma 1}$ und $\dot{E}_{r1}$ wird der Vektor $\dot{U}_1$ der zugeführten Klemmenspannung gefunden; diese so gefundene Klemmenspannung $\dot{U}_1$ wird aber im allgemeinen nicht mit der gegebenen Netzspannung U_n übereinstimmen, da I_2 ja willkürlich gewählt wurde. Es sind nun alle im Diagramm vorkommenden Größen der Netzspannung proportional; daher erübrigt es sich das Diagramm noch einmal zu zeichnen, man erhält ohne weiteres das wirkliche Vektordiagramm, wenn alle Werte mit $\frac{U_n}{U_1}$ multipliziert werden.

Liegt eine andere Schaltung des Rotors und des Vibrators vor als die oben angenommene, so läßt sich in entsprechender Weise auf Grund der Schaltung die Beziehung zwischen $\dot{U}_3$ und $\dot{U}_2$ bzw. $\dot{I}_3$ und $\dot{I}_2$ bestimmen, die Gleichung (V) aufstellen und das Diagramm entwerfen.

III. Analytisch-graphische Behandlung des Problems.

Dieser Abschnitt ist naturgemäß der wichtigste und verfolgt als Ziel die Aufstellung einer Gleichung, aus welcher auf Grund einer bestimmten primären Spannung U_1 und der Konstanten des Motors und des Vibrators das Verhalten der Maschine bei verschiedenen Betriebszuständen entnommen werden kann; wir gehen von den drei Grundgleichungen aus:

$$\dot{I}_{1m} \cdot w_1 = \dot{I}_1 w_1 + \dot{I}_2 w_2 ; \qquad (I)$$

$$\dot{U}_1 + jk_{11} \cdot \dot{I}_{1m} + jk_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 - r_1 \dot{I}_1 = 0. \qquad (II)$$

$$j \cdot s \cdot k_{12} \cdot \dot{I}_{1m} - j \left\{ \frac{c_3}{s} - s(k_3 + k_{\sigma 2}) \right\} \cdot \dot{I}_2 - (r_2 + r_3) \dot{I}_2 = 0. \qquad (V)$$

Entfernt man aus Gleichung (I) und (V) I_{1m}, so erhält man nach einigen Umformungen die Beziehung zwischen $\dot{I}_1$ und $\dot{I}_2$:

$$\dot{I}_1 = - \dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} \cdot \left\{ 1 - \frac{c_3}{s^2 k_{22}} + \frac{k_3 + k_{\sigma 2}}{k_{22}} + j \frac{r_2 + r_3}{s \cdot k_{22}} \right\}. \qquad (VI)$$

Aus Gleichung (I) und (II) ergibt sich:

$$\dot{U}_1 + jk_{11} \cdot \dot{I}_1 + jk_{\sigma 1} \cdot \dot{I}_1 + jk_{11} \cdot \dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} - r_1 \cdot \dot{I}_1 = 0.$$

und, wenn $k_{11} + k_{\sigma 1} = k_1$ gesetzt wird:

$$\dot{U}_1 + jk_1 \cdot \dot{I}_1 + jk_{11} \dot{I}_2 \frac{w_2}{w_1} - r_1 \dot{I} = 0.$$

Vereinigt man diese Gleichung mit Gleichung (VI), so folgt nach einigen Umformungen:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j(r_2 + r_3)s + (k_2 + k_3)s^2}{-r_1 c_3 + jk_1 c_3 + (r_2 + r_3)k_1 s + j(r_2 + r_3) r_1 s + r_1 (k_2 + k_3) s^2 - jk_1 (k_2 + k_3) s^2 + jk_{11} k_{22} s^2}$$

Setzt man durch Einführung der Beziehung $\sigma = 1 - \frac{1}{(1 + \sigma_1)(1 + \sigma_2)}$:

$$-j k_1 k_2 s^2 + jk_{11} k_{22} s^2 = -j k_1 k_2 \cdot \sigma s^2$$

so folgt:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j(r_2 + r_3)s + (k_2 + k_3)s^2}{-r_1 c_3 + jk_1 c_3 + (r_2 - r_3)k_1 s + j(r_2 + r_3) r_1 s + r_1 (k_2 + k_3) s^2 - jk_1 (k_2 \sigma + k_3) s^2} \qquad (VII)$$

Damit ist die gesuchte Abhängigkeit zwischen den primären Größen $\dot{U}_1$ und $\dot{I}_1$ gefunden und die Ortskurve aufgestellt für die Kaskade zwischen Induktionsmotor und Kompensator, für den Spezialfall der allgemeinen Kaskadenschaltung von Induktions- und Kommutatormotor.

Die durch Gleichung (VII) dargestellte Beziehung ist von der Form:

$$\dot{I} = \dot{U}_1 \cdot \frac{A_1 + j B_2 \lambda + C_1 \lambda^2}{D_1 + j D_2 + E_1 \lambda + j E_2 \lambda + F_1 \lambda^2 + j F_2 \lambda^2}$$

wobei $\lambda \equiv s$ einen variablen Parameter bedeutet. Eine Gleichung dieser Form ist eine Kurve 4. Ordnung bzw. eine sog. bizirkulare Quartik[1]; eine unmittelbare geometrische Konstruktion solcher Kurven ist im allgemeinen nicht möglich, dagegen läßt sich durch Zerlegung der Kurve eine ziemlich einfache graphische Darstellung geben. Die allgemeine Form einer bizirkularen Quartik ist gegeben durch:

$$\dot{I} = \dot{U} \cdot \frac{A + B\lambda + C\lambda^2}{D + E\lambda + F\lambda^2},$$

wenn λ ein variables Parameter von $+\infty$ bis $-\infty$ und A, B, C, D, E, F komplexe Zahlen von der Form $A = A_1 + jA_2$, $B = B_1 + jB_2$ usf. sind. Wir zerlegen nun diese Kurve 4. Ordnung in zwei Kreise K_1 und K_2, und zwar so, daß durch geo-

[1]) Vgl. Bloch: Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, Zürich 1917, S. 73 ff.

metrische Addition entsprechender Vektoren dieser Kreise die Kurve 4. Ordnung entsteht.

Zum Zweck einer klaren Darstellung sei folgendes erwähnt: Multipliziert man einen Zeitvektor $\dot{U}$ mit $a + b\lambda$, wobei a und b komplexe Zahlen von der Form:

$$a = a_1 + j a_2 \text{ und } b = b_1 + j b_2$$

und λ ein veränderlicher Parameter ist, so erhält man bei Abbildung dieser komplexen Größen auf der Gaußschen Zahlenebene für jeden Wert von λ einen neuen Zeitvektor $\dot{I}$, welcher gegenüber $\dot{U}$ gedreht und verlängert bzw. verkürzt ist; der geometrische Ort der Endpunkte aller Vektoren bildet die sog. Ortskurve; in diesem Fall ist die Ortskurve eine Gerade[1]), es ist also $\dot{I} = \dot{U}(a + b\lambda)$ die Gleichung einer Geraden in der Gaußschen Zahlenebene. In gleicher Weise ist der geometrische Ort für die Endpunkte aller Vektoren $\dot{I}$ von der Gleichung:

$$\dot{I} = \dot{U} \cdot \frac{a + b\lambda}{c + d\lambda}$$

ein Kreis von allgemeiner Lage[2]); c und d sind dabei komplexe Zahlen von der Form $c = c_1 + j c_2$ und $d = d_1 + j d_2$. Die rechtwinkligen Koordinaten für den Mittelpunkt dieses Kreises und für die Punkte: $\lambda = 0$, $\lambda = \infty$ und $\lambda = 1$ lassen sich ableiten zu:

$$x_m = \frac{U}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ -d_2 & d_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ -c_2 & c_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}} \text{ und } y_m = \frac{U}{2} \cdot \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}},$$

für $\lambda = 0$:

$$x_{\lambda 0} = U \cdot \frac{a_2 c_1 - a_1 c_2}{c_1^2 + c_2^2} \text{ und } y_{\lambda 0} = U \cdot \frac{a_1 c_1 + a_2 c_2}{c_1^2 + c_2^2},$$

für $\lambda = \infty$:

$$x_{\lambda\infty} = U \cdot \frac{b_2 d_1 - b_1 d_2}{d_1^2 + d_2^2} \text{ und } y_{\lambda\infty} = U \cdot \frac{b_1 d_1 + b_2 d_2}{d_1^2 + d_2^2},$$

für $\lambda = 1$:

$$x_{\lambda 1} = U \cdot \frac{(a_2 + b_2)(c_1 + d_1) - (a_1 + b_1)(c_2 + d_2)}{(c_1 + d_1)^2 + (c_2 + d_2)^2},$$

$$y_{\lambda 1} = U \cdot \frac{(a_1 + b_1)(c_1 + d_1) + (a_2 + b_2)(c_2 + d_2)}{(c_1 + d_1)^2 + (c_2 + d_2)^2},$$

Für die Zerlegung der bizirkularen Quartik in zwei Kreise setzen wir:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{A + B\lambda + C\lambda^2}{D + E\lambda + F\lambda^2} = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12}$$

$$\dot{I}_{11} = \dot{U}_1 \cdot \frac{a + b\lambda}{c + d\lambda} \text{ (Kreisgleichung } K_1)$$

und

$$\dot{I}_{12} = \dot{U}_1 \cdot \frac{f\lambda}{g + h\lambda} \text{ (Kreisgleichung } K_2)$$

a, b, c, d, f, g, h sind dabei komplexe Zahlen von der oben angegebenen Form; um einfache Beziehungen zu erhalten, formen wir die Gleichungen um und schreiben:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{A}{F} + \frac{B}{F}\lambda + \frac{C}{F}\lambda^2}{\frac{D}{F} + \frac{E}{F}\lambda + \lambda^2}$$

[1]) Vergl. Bloch a. a. O. Seite 41 ff.
[2]) Vergl. Bloch a. a. O. Seite 45.

$$\dot{I}_{11} = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\lambda}{\frac{c}{d} + \lambda} \quad \text{und} \quad \dot{I}_{12} = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{f}{h}\lambda}{\frac{g}{h} + \lambda}.$$

Bildet man die Summe $\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12}$, so ist:

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_{11} + \dot{I}_{12} = \dot{U}_1 \cdot \frac{\frac{a}{d}\cdot\frac{g}{h} + \lambda\left[\frac{a}{d} + \frac{b}{d}\cdot\frac{g}{h} + \frac{c}{d}\cdot\frac{f}{h}\right] + \lambda^2\left[\frac{b}{d} + \frac{f}{h}\right]}{\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h} + \lambda\left[\frac{c}{d} + \frac{g}{h}\right] + \lambda^2}.$$

Daraus resultieren 5 Bedingungsgleichungen, deren Lösung ergibt:

$$\frac{a}{d} = \frac{A(E \pm \sqrt{E^2 - 4DF})}{2DF}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{(AF + CD)(E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}) - 2BDF}{\pm 2DF\sqrt{E^2 - 4DF}}$$

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{2F}\cdot(E \pm \sqrt{E^2 - 4DF})$$

$$\frac{f}{h} = \frac{-AF(E \pm \sqrt{E^2 - 4DF}) - CD(E \mp \sqrt{E^2 - 4DF}) + 2BDF}{\pm 2DF\sqrt{E^2 - 4DF}}$$

$$\frac{g}{h} = \frac{1}{2F}(E \mp \sqrt{E^2 - 4DF}).$$

Setzt man:

$$r_2 + r_3 = r_{II},\ k_2 + k_3 = k_{II},\ k_2\cdot\sigma + k_3 = k_{\sigma II} \quad \text{und} \quad \frac{k_{II\sigma}}{k_{II}} = \sigma_{II},$$

so erhält Gleichung (VII) mit dieser vereinfachten Bezeichnungsweise die Form:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j\,r_{II}\,s + k_{II}\,s^2}{-r_1 c_3 + j k_1 c_3 + r_{II} k_1 s + j r_1 r_{II} s + r_1 k_{II} s^2 - j k_1 k_{\sigma II} s^2}$$

und es ergeben sich nachstehende Werte für die Konstanten A, B, C, D, E, F:

$A = -c_3$; $B = j\,r_{II}$; $C = k_{II}$;
$D = -r_1 c_3 + j k_1 c_3$; $E = r_{II} k_1 + j r_1 r_{II}$; $F = r_1 k_{II} - j k_1 k_{\sigma II}$.

Das vorliegende Problem soll nun vorläufig unter der Voraussetzung, daß der Widerstand der Statorwicklung zu vernachlässigen sei, d. h. daß $r_1 = 0$ sei, gelöst werden; damit geht Gleichung (VII) über in:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j\,r_{II}\,s + k_{II}\,s^2}{j k_1 c_3 + r_{II} k_1 s - j k_1 k_{\sigma II}\cdot s^2}$$

und die Konstanten werden:

$A = -c_3$; $B = j\cdot r_{II}$; $C = k_{II}$;
$D = j k_1 c_3$; $E = r_{II} k_1$; $F = -j k_1 k_{\sigma II}$.

Führen wir noch ein:

$$\sqrt{E^2 - 4DF} = k_1 k_{II}\cdot\sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II}} = k_1 k_{II}\cdot w \quad \text{also:} \quad w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II}},$$

so lassen sich nach Einsetzen der Werte von $\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d}, \frac{f}{h}, \frac{g}{h}$ in die Kreisgleichungen K_1 und K_2 die Konstanten a, b, c, d, f, g, h bestimmen; für diese Größen ergeben sich je zwei Werte, infolgedessen erhält man zwei Kreise K_1 und zwei Kreise K_2; es müssen nun diese Konstanten für $c_3 = 0$, $k_3 = 0$, $r_3 = 0$ in die des

Heylanddiagrammes für den normalen Drehstrommotor übergehen; dieses Diagramm ist bekanntlich die graphische Darstellung des analytischen Ausdrucks:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{j \cdot \frac{r_2}{k_2} + s}{k_1 \left(\frac{r_2}{k_2} - j \cdot \sigma \cdot s \right)},$$

wenn die Schlüpfung s als variabler Parameter betrachtet wird. Die Auswertung dieser Bedingung zeigt, daß nur je ein Kreis diesen Bedingungen entspricht, und liefert folgende Werte für die Kreiskonstanten:

$$a \equiv a_1 = -\left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w + w^2 \right);$$

$$b \equiv j\, b_2 = j \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} (1 - \sigma_{II}) + w (1 + \sigma_{II}) \right);$$

$$c \equiv j\, c_2 = j \cdot k_1 \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w + w^2 \right);$$

$$d \equiv h \equiv d_1 \equiv h_1 = 2\, k_1\, \sigma_{II} \cdot w;$$

$$f \equiv j\, f_2 = -j (1 - \sigma_{II}) \left(\frac{r_{II}}{k_{II}} - w \right);$$

$$g \equiv j\, g_2 = j\, k_1 \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\, w - w^2 \right).$$

Mit Hilfe der Seite 8 angegebenen Gleichungen lassen sich die für die beiden Kreise erforderlichen Punkte in rechtwinkligen Koordinaten bestimmen; es ergeben sich als:

1. Mittelpunktskoordinaten der beiden Kreise:

$$x_{m1} = \frac{U_1}{2\, k_1} \cdot \left(\frac{1 + 3\sigma_{II}}{2\, \sigma_{II}} + \frac{1 - \sigma_{II}}{2\, \sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} \right); \qquad y_{m1} = 0,$$

für den Kreis K_1 und entsprechend für den Kreis K_2:

$$x_{m2} = -\frac{U_1}{2\, k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{2\, \sigma_{II}} \left(\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} - 1 \right); \qquad y_{m2} = 0.$$

Die Mittelpunkte der beiden Kreise liegen auf der x-Achse, und zwar liegt der Mittelpunkt von K_1 auf der positiven x-Achse, der Mittelpunkt von K_2 auf der negativen x-Achse.

2. Koordinaten der beiden Punkte P_{1u} und P_{2u} für unendliche Schlüpfung ($s = \infty$):

$$x_{1u} = \frac{U_1}{2\, k_1} \cdot \left(\frac{1 + \sigma_{II}}{\sigma_{II}} + \frac{1 - \sigma_{II}}{\sigma_{II}} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} \right); \qquad y_{1u} = 0.$$

$$x_{2u} = -\frac{U_1}{2\, k_1} \cdot \frac{1 - \sigma_{II}}{\sigma_{II}} \left(\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} - 1 \right); \qquad y_{2u} = 0.$$

3. Koordinaten der beiden synchronen Punkte P_{1s} und P_{2s} ($s = 0$):

$$x_{1s} = \frac{U_1}{k_1}; \qquad y_{1s} = 0; \qquad x_{2s} = 0; \qquad y_{2s} = 0,$$

d. h. P_{1s} liegt auf der positiven x-Achse, P_{2s} fällt mit dem Ursprung zusammen.

4. Koordinaten der beiden Kurzschlußpunkte P_{1k} und P_{2k} (s = 1):

$$x_{1k} = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{2\frac{r_{II}}{k_{II}}\sigma_{II}(1-\sigma_{II}) + 2w\sigma_{II}(1+\sigma_{II}) + w\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}+w\right)^2}{w\left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}+w\right)^2 + 4\sigma_{II}^2\right]},$$

$$y_{1k} = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{(1-\sigma_{II})\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}+w\right)^2}{w\left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}+w\right)^2 + 4\sigma_{II}^2\right]},$$

und

$$x_{2k} = -\frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{2\sigma_{II}(1-\sigma_{II})\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}-w\right)}{w\left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}-w\right)^2 + 4\sigma_{II}^2\right]},$$

$$y_{2k} = -\frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{(1-\sigma_{II})\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}-w\right)^2}{w\left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}-w\right)^2 + 4\sigma_{II}^2\right]}.$$

5. Radien R_1 und R_2 der beiden Kreise:

$$R_1 = \frac{U_1}{2k_1} \cdot \frac{1-\sigma_{II}}{2\sigma_{II}}\left[\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} + 1\right] \quad \text{und} \quad R_2 = \frac{U_1}{2k_1} \cdot \frac{1-\sigma_{II}}{2\sigma_{II}}\left[\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w} - 1\right].$$

Bei den bisher abgeleiteten Beziehungen war vorausgesetzt, daß

$$w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II}}$$

reell ist; nun kann aber c_3 durch Änderung des Erregerstromes des Vibrators variiert werden; es ist daher möglich, daß für größere Werte von c_3 der obige Ausdruck für w imaginär wird; in diesem Falle setzen wir:

$$w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II}} = j \cdot \sqrt{4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2} = j \cdot w_i;$$

also

$$w_i = \sqrt{4\frac{c_3}{k_{II}} \cdot \sigma_{II} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2}.$$

Die Kreiskonstanten a, b, c, d, f, g, h nehmen damit unter Anwendung des gleichen Kriteriums wie oben (die Konstanten gehen für $c_3 = 0$, $k_3 = 0$, $r_3 = 0$ in die des Heylanddiagrammes für den normalen Drehstrommotor über) folgende Form an:

$$a' = -\left(w_i^2 + j \cdot \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i\right); \quad a_1' = -w_i^2; \quad a_2' = -\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i;$$

$$b' = -(1+\sigma_{II}) \cdot w_i - j\frac{r_{II}}{k_{II}}(1-\sigma_{II}); \quad b_1' = -(1+\sigma_{II})w_i; \quad b_2' = -\frac{r_{II}}{k_{II}}(1-\sigma_{II});$$

$$c' = k_1\left(-\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i + j \cdot w^{i2}\right); \quad c_1' = -\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot k_1 \cdot w_i; \quad c_2' = k_1 \cdot w_i^2;$$

$$d' = h' = j \cdot 2k_1 \cdot \sigma_{II} \cdot w_i; \quad d_1' = h_1' = 0; \quad d_2' = h_2' = 2k_1 \cdot \sigma_{II} w_i;$$

$$f' = -(1-\sigma_{II})\left(w_i - j \cdot \frac{r_{II}}{k_{II}}\right); \quad f_1' = -(1-\sigma_{II}) \cdot w_i; \quad f_2' = (1-\sigma_{II})\frac{r_{II}}{k_{II}};$$

$$g' = k_1\left(-\frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i - j \cdot w_i^2\right); \quad g_1' = -k_1 \cdot \frac{r_{II}}{k_{II}} \cdot w_i; \quad g_2' = -k_1 \cdot w_i^2.$$

Damit ergeben sich in gleicher Weise wie früher mittels der Seite 8 gegebenen Beziehungen die Koordinaten der Kreismittelpunkte, der synchronen Punkte, der Punkte für Kurzschluß und für unendliche Schlüpfung; es sind:

1. Die beiden Kreismittelpunkte für die Kreise K_1' und K_2':

$$x_{m1}' = \frac{U_1}{k_1}; \qquad y_{m1}' = -\frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{1-\sigma_{II}}{\sigma_{II}}\cdot\frac{\frac{c_3}{k_{II}}\cdot\sigma_{II}}{\frac{r_{II}}{k_{II}}\cdot w_i};$$

$$x_{m2}' = 0; \qquad y_{m2}' = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{1-\sigma_{II}}{\sigma_{II}}\cdot\frac{\frac{c_3}{k_{II}}\cdot\sigma_{II}}{\frac{r_{II}}{k_{II}}\cdot w_i}.$$

2. Die beiden Punkte P_{1u}' und P_{2u}' für unendliche Schlüpfung ($s = \infty$):

$$x_{1u}' = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{1+\sigma_{II}}{2\,\sigma_{II}}; \qquad y_{1u}' = -\frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{1-\sigma_{II}}{2\,\sigma_{II}}\cdot\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w_i};$$

$$x_{2u}' = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{1-\sigma_{II}}{2\,\sigma_{II}}; \qquad y_{2u}' = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{1-\sigma_{II}}{2\,\sigma_{II}}\cdot\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{w_i}.$$

3. Die beiden synchronen Punkte P_{1s}' und P_{2s}' ($s = 0$):

$$x_{1s}' = \frac{U_1}{k_1}; \qquad y_{1s}' = 0; \qquad x_{2s}' = 0; \qquad y_{2s}' = 0.$$

4. Die beiden Kurzschlußpunkte P_{1k}' und P_{2k}' ($s = 1$):

$$x_{1k}' = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II}\cdot w_i + (1+3\,\sigma_{II})\cdot w_i^2 + 2\,\sigma_{II}(1+\sigma_{II})\cdot w_i + (1-\sigma_{II})\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2}{w_i\left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 + (w_i + 2\,\sigma_{II})^2\right]};$$

$$y_{1k}' = -\frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{2\frac{r_{II}}{k_{II}}\sigma_{II}(1-\sigma_{II})}{w_i\left[\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 + (w_i + 2\,\sigma_{II})^2\right]}$$

und

$$x_{2k}' = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{2\,\sigma_{II}(1-\sigma_{II})}{w_i}\cdot\frac{w_i - 2\frac{c_3}{k_{II}}}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 + (w_i - 2\,\sigma_{II})^2};$$

$$y_{2k}' = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{2\,\sigma_{II}(1-\sigma_{II})}{w_i}\cdot\frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 + (w_i - 2\,\sigma_{II})^2}.$$

5. Die Radien R_1' und R_2' der beiden Kreise: Diese sind gleich groß und gleich der y-Ordinate der Kreismittelpunkt also:

$$R_1' = R_2' = |y_{m1}'| = |y_{m2}'| = \frac{U_1}{k_1}\cdot\frac{1-\sigma_{II}}{\sigma_{II}}\cdot\frac{\frac{c_3}{k_{II}}\cdot\sigma_{II}}{\frac{r_{II}}{k_{II}}\cdot w_i}.$$

Die Kreispunkte P_{1k} und P_{2k} bezw. P_{1k}' und P_{2k}' können auch als Schnittpunkte des Kreises mit einer Geraden, welche mit der x-Achse den Winkel $90^0 - \varphi_k$ einschließt, bestimmt werden; es ist dazu nur das Verhältnis tg $(90^0 - \varphi_k) = \frac{y_k}{x_k}$ zu bestimmen, so daß man die einzelnen Ordinatenwerte x_k, y_k nicht auszurechnen braucht.

IV. Konstruktion der Kurve 4. Ordnung.

Auf Grund der abgeleiteten Beziehungen gehen wir zur Konstruktion der Kurve 4. Ordnung über; die allgemeine Lage der beiden Kreise K_1 und K_2 ist in Bild 5 dargestellt; $Q_{1k} Q_{1s}$ ist die Schlüpfungsgerade für den Kreis K_1, $Q_{2k} Q_{2s}$ ist die Schlüpfungsgerade für den Kreis K_2. Nun läßt sich zu jedem Punkt P_1 mit der Schlüpfung s_1 des einen Kreises ein Punkt P_2 des anderen Kreises mit der gleichen Schlüpfung $s_2 = s_1$ finden; addiert man die den zusammengehörigen Punkten P_1 und P_2 entsprechenden Stromvektoren $\dot{I}_{11}$ und $\dot{I}_{12}$ geometrisch, so ergibt sich der Vektor $\dot{I}_1$, dessen Endpunkt P ein Punkt der Kurve 4. Ordnung ist; in dieser Weise läßt sich durch geometrische Addition der Stromvektoren, welche zu gleichen Schlüpfungen gehören, in einfacher Art die gesuchte Ortskurve konstruieren; die sich ergebende Kurve ist eine Kardioide.

Der über der Abszissenachse gelegene Teil der Kurve gilt für den Motorbetrieb, der unter der x-Achse befindliche Teil für den Generatorbetrieb.

Wie aus den oben abgeleiteten Beziehungen hervorgeht, sind die Mittelpunktskoordinaten der beiden Kreise außer von der zugeführten Spannung U_1 und von den Konstanten der beiden Maschinen auch von der Größe $w = \sqrt{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 - 4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II}}$ abhängig; c_3 ist aber für einen und denselben Vibrator keine absolute Konstante — es ist:

$$c_3 = \mathfrak{Z}_3^2 p_3^2 \left(\frac{s_3 b_3}{a_3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\pi^3 GD^2} \cdot \frac{1}{\nu_1} \cdot 10^{-16} = \text{Konstante} \times \mathfrak{Z}_3^2$$

— sondern hängt sehr stark von der Gleichstromerregung des Vibrators ab. Für $c_3 = 0$ nimmt w einen maximalen Wert $w_{max} = \frac{r_{II}}{k_{II}}$ an, der Kreis K_2 verschwindet und wir erhalten als Ortskurve einen Kreis, welcher nur wenig von dem normalen Kreisdiagramm (Heylandkreis) des Drehstrommotors abweicht; der Unterschied besteht lediglich darin, daß an Stelle von r_2 und k_2 die Größen r_{II} und k_{II} treten; dieser Grenzfall $c_3 = 0$ ist verwirklicht, wenn der Vibrator zwar eingeschaltet ist, die Anker aber nicht schwingen. Wächst nunmehr c_3 von Null an, schwingen also die Vibratoranker, so wird w kleiner, die Mittelpunktskoordinaten und damit auch die Kreisradien der beiden Kreise K_1 und K_2 nehmen zu bis bei dem Wert: $c_3 = \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \cdot \frac{k_{II}}{4\sigma_{II}}$ der Wert von $w = w_{min} = 0$ wird und die Radien der beiden Kreise $R_1 = R_2 = \infty$ werden. Die oben angegebene Konstruktion der Ortskurve aus den beiden Kreisen K_1 und K_2 ist natürlich in der Nähe dieses Wertes von c_3 nicht möglich, da der zu wählende Maßstab zu ungünstig würde.

Wird $c_3 > \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \cdot \frac{k_{II}}{k\sigma_{II}}$, so geht w über in w_i; nunmehr sind die für w_i abgeleiteten Beziehungen zu verwenden und damit die Konstruktion der Kurve 4. Ordnung durchzuführen. Die allgemeine Lage der Kreise K_1' und K_2' in diesem Falle stellt Bild 6 dar; $Q_{1k}' Q_{1s}'$ ist die Schlüpfungsgerade des Kreises K_1', Q_{1k}', Q_{2s}' ist die Schlüpfungsgerade des Kreises K_2'; addiert man geometrisch in gleicher Weise wie oben die zu den entsprechenden Punkten P_1' und P_2' gehörigen Stromvektoren $\dot{I}_{11}'$ und $\dot{I}_{12}'$, so erhält man den Vektor $\dot{I}_1'$ und damit einen Punkt der gesuchten Ortskurve. Nimmt c_3 noch größere Werte an, so nimmt auch w_i zu, denn es ist: $w_i = \sqrt{4\frac{c_3}{k_{II}}\sigma_{II} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2}$, mit zunehmendem w_i werden aber die Mittelpunktskoordinaten und damit die Kreisradien kleiner. Für den Grenzfall $c_3 = \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \frac{k_{II}}{4\sigma_{II}}$ wird auch $w_i = 0$ und die Kreismittelpunkte rücken in unendliche Entfernung.

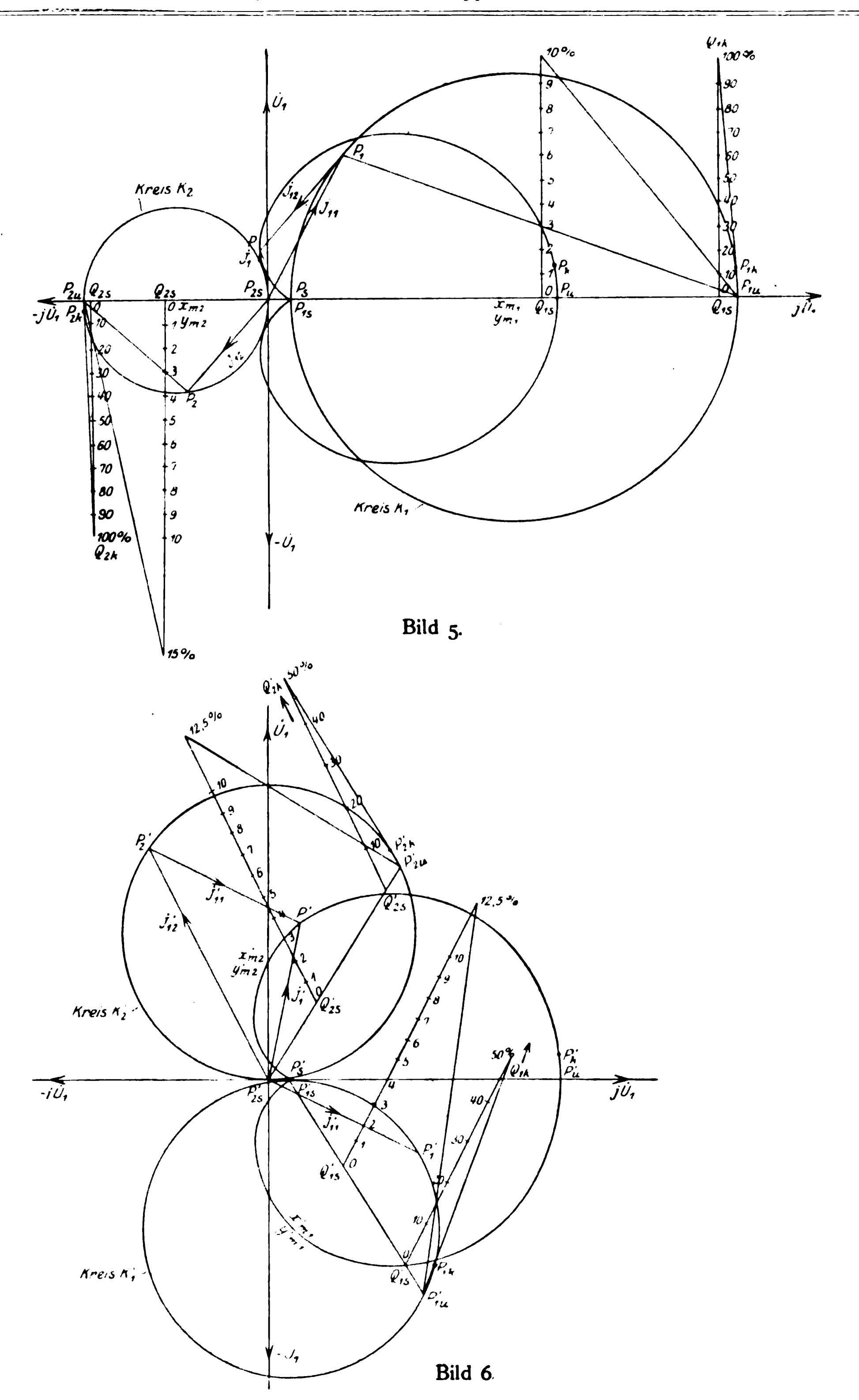


Bild 5.

Bild 6.

Die Konstruktion der Kurve 4. Ordnung besteht also in allen Fällen im wesentlichen aus der Zeichnung von zwei Kreisen (ähnlich dem Heylandkreis des Drehstrommotors) mit den dazugehörigen Schlüpfungsgeraden.

V. Phasen-Über- und Unterkompensation.

Formen wir die Gleichung der Ortskurve, von der wir ausgegangen sind:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{c_3 + j r_{II} s + k_{II} s^2}{j k_1 c_3 + r_{II} k_1 s - j k_1 k_{II} s^2}$$

um in die Gleichung:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{k_1} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II}) s^3 + j\left[\left(\frac{c_3}{k_{II}}\right)^2 + \left\{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 + \frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II})\right\} s^2 + \sigma_{II} s^4\right]}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 s^2 + \left(\frac{c_3}{k_{II}} - \sigma_{II} s^2\right)^2},$$

so ergeben sich daraus die rechtwinkligen Koordinaten (x, y) eines beliebigen Punktes der Ortskurve:

$$x = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{\left(\frac{c_3}{k_{II}}\right)^2 - \left\{\frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II}) - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2\right\} \cdot s^2 + \sigma_{II} s^4}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 s^2 + \left(\frac{c_3}{k_{II}} - \sigma_{II} s^2\right)^2}.$$

$$y = \frac{U_1}{k_1} \cdot \frac{\frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II}) \cdot s^3}{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 s^2 + \left(\frac{c_3}{k_{II}} - \sigma_{II} s^2\right)^2}$$

damit läßt sich die Tangente des Phasenverschiebungswinkels φ_1 zwischen $\dot{I}_1$ und $\dot{U}_1$ angeben zu:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x}{y} = \frac{\left(\frac{c_3}{k_{II}}\right)^2 - \left\{\frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II}) - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2\right\} s^2 + \sigma_{II} s^4}{\frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II}) \cdot s^3}$$

oder:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\alpha s^4 - \beta s^2 + \gamma}{\delta \cdot s^3}$$

dabei bedeutet:

$$\alpha = \sigma_{II}; \quad \beta = \frac{c_3}{k_{II}}(1 + \sigma_{II}) - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2; \quad \gamma = \left(\frac{c_3}{k_{II}}\right)^2; \quad \delta = \frac{r_{II}}{k_{II}}(1 - \sigma_{II}).$$

Setzt man $\operatorname{tg} \varphi_1 = 0$, also:

$$\alpha s^4 - \beta s^2 + \gamma = 0,$$

so liefert die Auflösung dieser Gleichung die Werte der Schlüpfung s, für welche völlige Phasenkompensation eintritt; es ist:

$$s = \sqrt{\frac{\beta}{2\alpha} \pm \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}},$$

es können nun 3 Fälle eintreten:

1) $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ ist reell, also $\beta^2 > 4\alpha\gamma$; wir erhalten zwei Werte für die Schlüpfung s, für welche vollständige Phasenkompensation eintritt; die Ortskurve schneidet die Ordinatenachse in zwei Punkten, in S_1 und S_2 (vgl. Bild 7); in dem Teil der Kurve zwischen S_1 und S_2 tritt Überkompensation ein, d. h. der Strom $\dot{I}_1$ eilt der Spannung $\dot{U}_1$ zeitlich vor, der Drehstrommotor belastet in diesem Bereich das Netz kapazitiv.

2. $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = 0$ oder $\beta^2 = 4\alpha\gamma$ und $\beta = 2\sqrt{\alpha\gamma}$ (nur das positive Vorzeichen der Wurzel kommt in Betracht); in diesem Falle erhält man nur einen Wert für die Schlüpfung s (vgl. Bild 8), bei dem die Phasenkompensation erreicht wird; die Ortskurve berührt in dem Punkt S die Ordinatenachse, die Punkte S_1 und S_2 fallen also zusammen.



3. $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ ist imaginär, also $\beta^2 < 4\alpha\gamma$; es gibt keinen Wert der Schlüpfung s (vgl. Bild 9), für welchen völlige Phasenkompensation eintritt; die Ortskurve schneidet oder berührt die Ordinatenachse überhaupt nicht. Der Leistungsfaktor kann in diesem Falle daher nicht auf den Wert 1 gebracht werden, d. h. der Drehstrommotor belastet das Netz stets induktiv.

Es ist daher, um völlige Phasenkompensation zu erreichen, die Bedingung zu erfüllen:

$$\beta^2 \gtreqless 4\alpha\gamma$$

oder, wenn wir die oben eingeführten Werte einsetzen:

$$(1 + \sigma_{II}) \cdot \frac{c_3}{k_{II}} - \left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \gtreqless 2 \frac{c_3}{k_{II}} \cdot \sqrt{\sigma_{II}}$$

und:

$$c_3 \gtreqless \frac{\left(\frac{r_{II}}{k_{II}}\right)^2 \cdot k_{II}}{1 + \sigma_{II} - 2\sqrt{\sigma_{II}}},$$

d. h. der Vibrator ist so zu dimensionieren, daß c_3 diesen Wert durch entsprechende Einstellung der Gleichstromerregung annehmen kann.

Um aus der oben entwickelten Beziehung $\operatorname{tg}\varphi_1 = f(s)$ das Minimum für $\operatorname{tg}\varphi_1$ zu finden, setzt man:

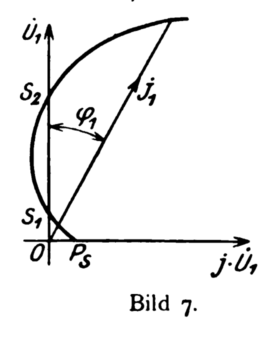


Bild 7.

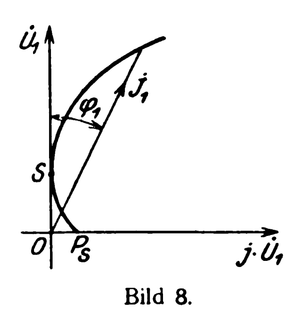


Bild 8.

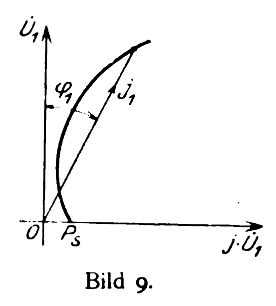


Bild 9.

$$\frac{d \operatorname{tg}\varphi_1}{ds} = 0.$$

Die Ausführung der Differentiation liefert:

$$\alpha s^4 + \beta s^2 - 3\gamma = 0$$

und daraus:

$$s = \sqrt{\frac{\sqrt{\beta^2 + 12\alpha\gamma}}{2\alpha} - \frac{\beta}{2\alpha}};$$

der aus dieser Beziehung gefundene Wert von s gibt an, bei welcher Schlüpfung jeweils die stärkste Phasenkompensation bzw. -überkompensation eintritt.

VI. Berücksichtigung des Statorwiderstandes.

Wir wollen jetzt die bisher gemachte Annahme, daß der Statorwiderstand vernachlässigt werden darf, daß also $r_1 = 0$ ist, fallen lassen und die Ortskurve 4. Ordnung für den Drehstrommotor mit Vibrator bei $r_1 \neq 0$ konstruieren; in diesem Falle ziehen wir die graphische Behandlung des Problems vor, da die Durchführung auf rein analytischem Wege ziemlich umständlich wäre.

Es bezeichne $\dot{I}_1$ den primären Strom für $r_1 = 0$ und $\dot{I}_{1r}$ den primären Strom für $r_1 \neq 0$; Gleichung (VII) geht für $r_1 = 0$ in die Gleichung über:

$$\dot{I}_1 = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + j r_{II} \cdot s + k_{II} s^2}{j k_1 c_3 + r_{II} k_1 s - j k_1 k_{\sigma II} s^2}.$$

Setzt man:

$$\dot{I}_{1r} = (\dot{U}_1 - r_1 \cdot \dot{I}_{1r}) \cdot \frac{-c_3 + j r_{II} s + k_{II} s^2}{j k_1 c_3 + r_{II} k_1 s - j k_1 k_{\sigma II} s^2}$$

und löst die Gleichung nach $\dot{I}_{1r}$ auf, so erhält man:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{U}_1 \cdot \frac{-c_3 + jr_{II}s + k_{II}s^2}{-r_1 c_3 + jk_1 c_3 + (r_{II}k_1 + jr_1 r_{II})s + (r_1 k_{II} - jk_1 k_{\sigma II})s^2}$$

das ist aber nichts anderes als Gleichung (VII); wir können daher diese Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{I}_1 \cdot \frac{1}{1 + r \cdot \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}} = \dot{I}_1 \cdot \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1}.$$

Diese Beziehung vermittelt uns die ganze graphische Konstruktion für die Berücksichtigung des Statorwiderstandes r_1, wir führen ein:

$$\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1 = (\varepsilon + j \cdot \eta) \cdot \dot{U}_1$$

daher:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{I}_1 \cdot \frac{1}{\varepsilon + j \cdot \eta} = \dot{I}_1 \cdot \frac{\varepsilon - j \cdot \eta}{\varepsilon^2 + \eta^2}$$

oder:

$$\dot{I}_{1r} = \dot{I}_1 \left[\frac{1}{\varepsilon^2 + \eta^2} - j \cdot \frac{\eta}{\varepsilon^2 + \eta^2} \right].$$

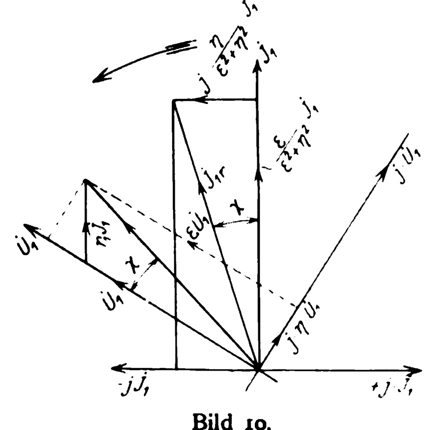


Bild 10.

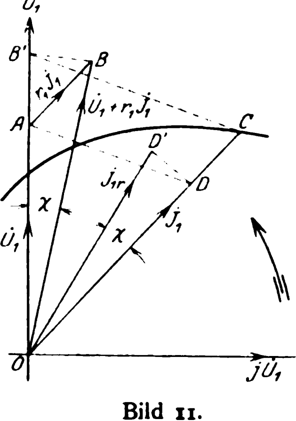


Bild 11.

Wird ein Zeitvektor mit einer komplexen Zahl multipliziert, so wird der Vektor gedreht und außerdem seine absolute Größe verändert; in unserem Falle wird der Vektor $\dot{I}_1$ um den Winkel $\chi = \operatorname{arc\,tan} \frac{\eta}{\varepsilon}$ gedreht und $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}}$ mal so groß. Der Winkel χ ist auch der Winkel, den die beiden Vektoren $\dot{U}_1$ und $\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1$ miteinander einschließen, die absolute Größe von $\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1$ beträgt:

$$|\dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1| = |\dot{U}_1| \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}.$$

Daher ergibt sich folgende nach dem Gesagten ohne weiteres verständliche Konstruktion; man macht:

$$O A = \dot{U}_1$$
$$A B = r_1 \cdot \dot{I}_1$$
$$O C = \dot{I}_1$$
$$O B' = O B = \dot{U}_1 + r_1 \dot{I}_1.$$

Man verbindet B' mit C und zieht $AD \parallel B'C$; macht man noch $OD' = OD$, wobei $\sphericalangle D'OD = \sphericalangle AOB = \chi$ ist, so ist $OD' = \dot{I}_{1r}$ nach Größe und Richtung.

Wiederholt man die Konstruktion für verschiedene Werte von $\dot{I}_1$ und verbindet die Endpunkte der so erhaltenen Vektoren $\dot{I}_{1r}$, so ergibt sich damit die gesuchte Ortskurve des Drehstrommotors mit Vibrator unter Berücksichtigung des Statorwiderstandes r_1.

Die Erwärmung eines Kabels durch dielektrische Verluste.

Von

H. Schering.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Der Verband Deutscher Elektrotechniker hat der Berechnung seiner Strombelastungstabellen für Kabel eine zulässige Übertemperatur des Leiters von 25° C über die unbeeinflußte Temperatur des Erdreiches zugrunde gelegt. Für die Hochspannungskabel bis 10000 V war bisher[1]) vorsichtshalber mit Rücksicht auf die zusätzliche Erwärmung durch dielektrische Verluste etwas weniger als 25° in die Rechnung eingesetzt. Die Tabelle soll nun für höhere Spannungen und demgemäß stärkere Isolation auf Grund von Versuchen erweitert werden[2]), es ist daher wohl von einigem Interesse die Erwärmung eines Kabels durch dielektrische Verluste auch rechnerisch zu verfolgen.

Ersatzschema der dielektrischen Verluste.

In einem mit Verlusten behafteten Kondensator, an welchem die Wechselspannung E von der Kreisfrequenz ω liegt, fließe der Strom J mit der Phasenverschiebung $\varphi = -(90^0 - \delta)$; in ihm wird die Leistung N_ε in Wärme umgesetzt:

$$N_\varepsilon = E\,J \cos\varphi \qquad J_b = J \sin\varphi$$
$$N_\varepsilon = E\,J_w \qquad J_w = J\cos\varphi = J_b \cdot \mathrm{cotg}\,\varphi = J_b\,\mathrm{tg}\,\delta.$$

δ bezeichnet man als den Verlustwinkel, er ist in begrenzten Bereichen von der Spannung und von der Frequenz unabhängig. Denken wir uns den mit Verlusten behafteten Kondensator ersetzt durch eine reine Kapazität C mit nebengeschaltetem Widerstand R_ε, so fließt der Blindstrom J_b nur durch C, der Wirkstrom J_w nur durch R_ε, es ist dann:

$$J_b = E\,\omega\,C, \qquad J_w = R_\varepsilon.$$

Der dielektrische Verlust kann also so behandelt werden, als wäre an die Spannung E ein Widerstand R_ε angelegt, in dem die Leistung N_ε in Wärme umgesetzt wird.

Der Ersatzwiderstand R_ε ergibt sich danach zu

$$R_\varepsilon = \frac{E}{J_w} = \frac{E}{J_b\,\mathrm{tg}\,\delta} = \frac{1}{\omega\,C\,\mathrm{tg}\,\delta}.$$

Gehen wir nun zu einem Elementarkondensator über mit der Dicke ds, der Fläche q und der Dielektrizitätskonstante ε, die von der Spannung und der Frequenz im begrenzten Bereich nicht beeinflußt wird, so berechnet sich seine Kapazität zu

$$C = \frac{q\,\varepsilon}{4\,\pi\,ds} \cdot \frac{10^{-12}}{0{,}9} \text{ Farad.}$$

Da nun $\omega = 2\,\pi\,f$ ist, wobei f die Frequenz in Perioden pro Sekunde bedeutet, so ergibt sich der dielektrische Ersatzwiderstand des Elementarkondensators zu:

$$R_\varepsilon = \frac{1{,}8 \cdot 10^{12}}{f\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta} \cdot \frac{ds}{q}.$$

Der spezifische Ersatzwiderstand ϱ_ε ist dann

$$\varrho_\varepsilon = \frac{1{,}8 \cdot 10^{12}}{f\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta} = \frac{10^{12}}{0{,}556\,f\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta}\ \Omega. \qquad (1)$$

[1]) Normalien für isolierte Leitungen, II Belastungstabelle für Bleikabel, Entwurf ETZ. 1912, S. 548.

[2]) Normen für isolierte Leitungen und Starkstromanlagen, C. 2 Belastungstafel für Bleikabel, Entwurf ETZ. 1922, S. 300.

Wir sehen nun, daß das Problem der Wärmeentwicklung durch Verluste in einem gleichmäßigen Dielektrikum formal gleich ist der Wärmeentwicklung in einem homogenen Leiter durch die Stromwärme und können daher weiter unsere Aufgabe nach dem Vorgange Kohlrauschs[1]) bei seiner Bestimmung der thermischen Leitfähigkeit von Metallen aus der elektrischen Leitfähigkeit behandeln.

Das Einfach-Kabel.

Die Übertemperatur des Leiters über den Mantel.

Betrachten wir von einem langen einadrigen Kabel ein Stück, das hinreichend weit von den Enden entfernt ist, so daß in der Richtung der Längsachse kein Wärmeausgleich stattfindet. Die Form des Querschnittes durch das Kabel sei ganz beliebig, nur zeige das Kabel überall das gleiche Querschnittsbild (Bild 1). Der Leiter habe die effektive Wechselspannung E_i von der Frequenz f gegen den geerdeten Mantel. Der Verlust im Dielektrikum erwärmt das Kabel; durch das Dielektrikum mit dem spezifischen Wärmewiderstand σ_k (in elektrischem Maß) fließt ein Wärmestrom nach außen. Es möge nun der stationäre Endzustand der Wärmeströmung eingetreten sein.

Leiter und Mantel sollen thermisch so gut leiten, daß ihre Grenzfläche gegen das Dielektrikum Flächen gleicher Temperatur sind, gleichzeitig sind dieselben auch Flächen gleicher elektrischer Spannung; die Stromfäden des elektrischen und des Wärmestromes verlaufen senkrecht zu ihren Gleichwertflächen.

Bild 1. Querschnitt.

Wir können uns nun das Dielektrikum ganz in fadenförmige Elemente vom Mantel zum Leiter zerlegt denken, derart, daß in jedem Elementarfaden die Stärke des elektrischen Stromes konstant ist. Bezeichnet q einen Querschnitt des Fadens, j die elektrische Stromdichte, so ist also q j längs des Fadens unveränderlich. Wir wollen aber gemäß unserem Ersatzschema nur die Wirkkomponente j_W betrachten, die gleich $j \cdot \cos\varphi = j \sin\delta$ ist. Da nun δ unveränderlich ist, so gilt, wenn k eine Konstante bezeichnet

$$q\, j_W = k.$$

Ist nun $-\frac{dE}{ds}$ das Spannungsgefälle bei q, so ist nach dem Ohmschen Gesetz unseres Ersatzschemas

$$j_W = -\frac{1}{\varrho_\varepsilon}\frac{dE}{ds} \qquad (2)$$

mithin

$$j_W\, p = k = -\frac{q}{\varrho_\varepsilon}\frac{dE}{ds}. \qquad (3)$$

Die in dem Element q ds in Wärme umgesetzte elektrische Leistung N_ε berechnet sich nach dem Ersatzschema als das Produkt von Spannung und Wirkstrom zu

$$N_\varepsilon = -j_W\, q \frac{dE}{ds} = -k \frac{dE}{ds}. \qquad (4)$$

Bei dem Temperaturgefälle $-\frac{d\vartheta}{ds}$ fließt in einem Medium von dem spezifischen Wärmewiderstand σ_k (in elektrischem Maß) senkrecht zur Isotherme ein Wärmestrom, dessen Stromdichte j^* ist:

$$j^* = -\frac{1}{\sigma_k}\frac{d\vartheta}{ds}. \qquad (5)$$

[1]) Fr. Kohlrausch, Berl. Bed. 38, 1711, 1899. — W. Voigt, Gött. Nachr. 1899, 233.

Die Beziehung zwischen Stromdichte und Gefälle ist thermisch (5) und elektrisch (2) völlig die gleiche; da nun die Grenzflächen gleichzeitig thermisch und elektrisch Gleichwertflächen sind, muß also auch im Innern des Dielektrikums jede Fläche gleicher elektrischer Spannung eine Fläche gleicher Temperatur sein. Der Elementarfaden der elektrischen Strömung muß also gleichzeitig der Kanal für die thermische Strömung sein.

Im Element (q ds) des Fadens erfährt nun der Wärmestrom $q j^*$ einen Zuwachs durch die in dem Element in Wärme umgesetzte elektrische Energie. Im stationären Zustand ist der Zuwachs gleich der erzeugten Wärme

$$\frac{d(q j^*)}{ds} = \frac{d\left(\frac{q}{\sigma_k}\frac{d\vartheta}{ds}\right)}{ds} = -k\frac{dE}{ds}. \tag{6}$$

Durch die erste Integration erhalten wir

$$\frac{q}{\sigma_k}\frac{d\vartheta}{ds} = k E + \text{Integrationskonstante}. \tag{7}$$

Dividieren wir durch k und setzen auf der linken Seite den Wert für k aus Gleichung (3) ein, so ergibt sich unter Einführung einer neuen Integrationskonstante A

$$-\frac{\varrho_\varepsilon}{\sigma_k}\frac{d\vartheta}{dE} = E + A. \tag{8}$$

Im stationären Zustand fließt durch die Grenzfläche: Dielektrikum-Leiter kein Wärmestrom, für $E = E_i$ ist also

$$\frac{d\vartheta_i}{ds} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\vartheta_i}{dE} = 0$$

es ergibt sich daraus und aus Gleichung (7) die erste Integrationskonstante

$$A = -E_i$$

und

$$\frac{d\vartheta}{dE} = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon}(E_i - E). \tag{9}$$

Die zweite Integration ergibt

$$\vartheta = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon}\left(E \cdot E_i - \frac{E}{2}\right) + B.$$

Daraus folgt, da am Mantel $E_m = 0$ ist, daß die Temperaturdifferenz $\vartheta_i - \vartheta_m$ zwischen Leiter und Mantel ist

$$\vartheta_i - \vartheta_m = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon}\frac{E_i^2}{2}. \tag{10}$$

Setzen wir den Wert für ϱ_ε ein, so bekommen wir

$$\vartheta_i - \vartheta_m = \frac{10^{-12} f \varepsilon \sigma_k E_i^2 \operatorname{tg}\delta}{3{,}6}. \tag{11}$$

Es ergibt sich die bemerkenswerte Tatsache, daß die von den dielektrischen Verlusten herrührende Übertemperatur des Leiters über den Mantel völlig unabhängig von den Abmessungen und der Gestalt des Einfachkabels ist und bei gegebenem Dielektrikum lediglich von dem Quadrat der Spannung und von der Frequenz derselben abhängig ist.

Dielektrische Verluste und Stromwärme.

Es werde nun in dem Leiter des Kabels durch den Betriebsstrom die Wärme N_i Watt pro Längeneinheit erzeugt. Das Kabel sei ein konzentrisches mit kreisförmigem Querschnitt, dann sind auch die Isothermen Kreise; r sei der Radius vom Mittelpunkt gemessen. Findet keine Erwärmung durch dielektrische Verluste statt, so ist



$$\frac{2\pi r}{\sigma_k}\frac{d\vartheta}{dr} = -N_i. \qquad (12)$$

Die Integration ergibt

$$\vartheta = -\frac{\sigma_k N_i}{2\pi}\ln r + \text{Integrationskonstante}$$

und es ist

$$\vartheta_i - \vartheta_m = \frac{\sigma_k N_i}{2\pi}\ln\frac{r_m}{r_i}. \qquad (13)$$

Die Differentialgleichung (7) für die Erwärmung durch dielektrische Verluste geht für den kreisförmigen Kabelquerschnitt über in die Form

$$\frac{2\pi r}{\sigma_k}\frac{d\vartheta}{dr} = k E + \text{const.} \qquad (7a)$$

Da die Differentialgleichungen (7a) und (12) linear sind und in den linken Seiten übereinstimmen, so addieren sich bei gleichzeitigem Auftreten beider Wärmequellen einfach ihre Lösungen (10) und (13).

Die Übertemperatur des Leiters über den Mantel $\vartheta_i - \vartheta_m$ ist dann

$$\vartheta_i - \vartheta_m = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon}\frac{E_i^2}{2} + \frac{\sigma_k N_i}{2\pi}\ln\frac{r_m}{r_i}.$$

Die von den dielektrischen Verlusten herrührende Übertemperatur addiert sich einfach zu der von der Stromwärme im Leiter erzeugten Übertemperatur.

Die Übertemperatur des Leiters über das Erdreich.

Die Übertemperatur ϑ_m des Mantels über das Erdreich berechnet sich aus der Bedingung, daß die gesamte in der Zeiteinheit im Kabel erzeugte Wärme in der Zeiteinheit durch den Mantel und die weiteren Isothermalflächen nach außen wandern muß, und zwar durch die Umspinnung und das Erdreich. Der spezifische Wärmewiderstand der Umspinnung ist dem des Dielektrikums $\sigma_k = 550$ gleich, der spezifische Wärmewiderstand des Erdreichs ist durchschnittlich $\sigma_n = 40$[1]. Der Wärmewiderstand des Bleimantels und der Eisenbewehrung wird vernachlässigt.

Wir nehmen das Kabel weiter als konzentrisches Kabel mit kreisförmigem Querschnitt an. Außerhalb des Bleimantels gibt, wenn in der Längeneinheit des Kabels die Energie N in Wärme umgesetzt wird:

$$-\frac{d\vartheta}{dr} = \frac{\sigma N}{2\pi r}.$$

Wir lassen jetzt die Temperaturerhöhung durch Stromwärme im Leiter außer acht, innerhalb des Kabels superponierte sie sich bereits einfach zu der durch die dielektrischen Verluste erzeugten, außerhalb des Kabels gilt natürlich das gleiche. Die durch dielektrische Verluste in der Längeneinheit des Kabels erzeugte Wärme ist:

$$N = E^2 \omega C \operatorname{tg}\delta$$

$$\omega C \operatorname{tg}\delta = \frac{2\pi f \cdot \varepsilon \operatorname{tg}\delta \cdot 10^{-12}}{0{,}9 \cdot 2\ln\frac{D_1}{D_i}} = \frac{2\pi}{\varrho_\varepsilon}\frac{1}{\ln\frac{D_1}{D_i}}.$$

Es bezeichnet dabei und im folgenden D den Durchmesser über dem durch den Index gekennzeichneten Stoff und zwar ist i der Leiter, 1 das Dielektrikum, 2 der Bleimantel, 3 die erste Jutebespinnung, 4 die Eisenblechbewehrung, a die äußere Jutebespinnung, ferner sei l die Tiefe, in der das Kabel im Boden verlegt ist. Dann ergibt sich nach Teichmüller[1]) die Übertemperatur des Mantels über das Erdreich in weiterer Entfernung[2]):

[1]) Teichmüller, Die Erwärmung der elektrischen Leitungen. Verlag Enke, Stuttgart, 1905, Kap. VI.

[2]) Dabei ist vorausgesetzt, daß das Erdreich in den verschiedenen Schichten, also auch an der Oberfläche, an sich gleiche Temperatur hat, was praktisch natürlich selten genau der Fall ist.

$$\vartheta_m = \frac{\sigma_k E^2}{\varrho_\varepsilon} \cdot \frac{\ln \frac{D_a D_3}{D_4 D_2} + \frac{\sigma_n}{\sigma_k} \ln 4 \frac{e}{D_a}}{\ln \frac{D_1}{D_i}}. \tag{16}$$

Da nur das Verhältnis von natürlichen Logarithmen (ln) vorkommt, können wir an ihrer Stelle die Briggschen Logarithmen (log) setzen.

Als Abkürzung schreiben wir:

$$X = 2 \cdot \frac{\log \frac{D_a D_3}{D_4 D_2} + \frac{\sigma_n}{\sigma_k} \log 4 \frac{1}{D_a}}{\log \frac{D_1}{D_i}}. \tag{17}$$

Es ist dann die Übertemperatur des Leiters über das Erdreich:

$$\vartheta_i = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon} \frac{E^2}{2} (1 + X). \tag{18}$$

In Bild 2 ist X als Funktion der Isolationsstärke für eine Anzahl Leiterquerschnitte graphisch dargestellt, wobei folgende sonstige Stärken angenommen sind: Bleimantel 3 mm, erste Jutebespinnung 3 mm, Eisenblech 2 mm, äußere Jutebespinnung 2 mm.

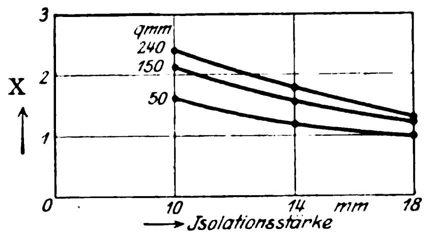


Bild 2. Tafel für X beim Einfachkabel.

Es ist nun bemerkenswert, daß X meist größer als 1, und zwar teilweise erheblich größer ist; das bedeutet, daß die Übertemperatur des Bleimantels über den Erdboden meist größer ist als die Übertemperatur des Leiters über den Bleimantel. (Der Temperaturabfall vom Bleimantel zur Erdoberfläche verteilt sich so, daß etwa $^2/_3$ auf die beiden Jutebespinnungen und $^1/_3$ auf das Erdreich kommen.)

Der Grund für diese Tatsache liegt darin, daß die Erwärmung im Dielektrikum selbst erzeugt wird, also ein erheblicher Teil derselben in unmittelbarer Nähe des Bleimantels. Würde die gleiche Wärmemenge im Leiter statt im Dielektrikum erzeugt, so würde die Übertemperatur des Leiters über den Bleimantel gerade doppelt so hoch ausfallen als sie wirklich ist, während die Übertemperatur des Bleimantels unverändert bleiben würde.

Es ist nun von wesentlichem Interesse zu überschlagen, in welcher Größenordnung die Übertemperatur ϑ_i sich hält.

Für die Frequenz $f = 50$ per/sec, die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 3{,}5$ und $\mathrm{tg}\,\delta = 0{,}02$ ist ϱ_ε rund $0{,}50 \cdot 10^{12}$, ferner ist $\sigma_k = 550$, rechnen wir die Spannung in kV und bezeichnen die Maßzahl mit V, so ist

$$\vartheta_i = 0{,}55 \cdot 10^{-3}\ V^2 (1 + X). \tag{19}$$

Eine gewisse Anschauung der Temperaturen ϑ_i bei verschiedenen Spannungen gibt die folgende Tabelle:

	V = 10	20	30	40	50 kV
X = 1	ϑ_i = 0,11	0,44	0,99	1,76	2,75° C
X = 2	ϑ_i = 0,17	0,66	1,49	2,64	4,12° C

Bei einem Einfach-Kabel von 15 mm Isolationsstärke und 150 qmm Leiterquerschnitt ist nach Bild 2 die Zahl $X = 1{,}50$, demnach $(1 + X) = 2{,}50$. Werden drei solche Kabel für die Fortleitung von 50 kV Drehstrom benutzt, wie es z. B. geschehen ist, so liegt an einem Kabel die Spannung $V = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28{,}9$ kV, die Übertemperatur ϑ_i würde, wenn sich die drei Kabel nicht beeinflußten, sein $\vartheta_i = 1{,}14^0$ C. Liegen

die drei Kabel dicht nebeneinander im Erdboden, so wird die Temperatur noch etwas höher, weil die dreifache Wärmemenge gegenüber dem Einzelkabel durch das die Kabel umhüllende Erdreich strömen muß; da auf das Erdreich etwa $1/3$ der Übertemperatur des Bleimantels kam, würde ein anderes $X' = \frac{2X}{3} + \frac{1}{3} X \cdot 3$ etwa einzusetzen sein, also $X' = 2{,}5$ und somit $\vartheta_i' = 1{,}6^0$ C. Die Belastungsstromstärke müßte daher auf Grund der Übertemperatur $23{,}4^0$ an Stelle $25{,}0^0$ C berechnet werden, also etwa 3% niedriger sein, als ohne dielektrische Verluste. Das wäre etwa die Grenze dessen, was man unberücksichtigt lassen könnte. Zweifellos strebt die Entwicklung der Zukunft dahin, Kabel für noch höhere Spannung zu verwenden, es würde dann die dielektrische Erwärmung in Rücksicht zu ziehen sein, wenn nicht der Verlustwinkel wesentlich kleiner als oben angegeben ($\operatorname{tg} \delta = 0{,}02$) ist. Tatsächlich gibt es schon Kabel, die bei sehr hohen Spannungen weniger als die Hälfte dieses Verlustwinkels haben.

Das Drehstrom-Kabel.

Das Drehstromkabel sei symmetrisch aus drei kreisrunden Leitern vom Durchmesser $2a$ aufgebaut, die Isolationsstärke zwischen den Leitern, wie zwischen Leiter und Mantel, sei 2ξ, dann liegen die Mittelpunkte der drei Leiter auf einem Kreise mit dem Durchmesser $2d = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} (a + \xi)$, der Durchmesser des Kabels unter dem Bleimantel ergibt sich zu $2R = 2(2{,}155\,a + 3{,}155\,\xi)$. Die Spannungsbeanspruchung sei symmetrisch entsprechend dem normalen Drehstrombetriebe.

Nach der vom Verbande Deutscher Elektrotechniker gegebenen Definition der elektrischen Eigenschaften gestreckter Leiter kann man die Vorgänge am symmetrischen Mehrleitersystem darstellen durch einen einzigen Strom, eine einzige Spannung und je einen einzigen Wert von Kapazität, Ableitung, Induktivität und Widerstand pro Längeneinheit, die nach einem Vorschlag von Warburg als „Betriebswerte" bezeichnet werden. Beim symmetrischen Drehstromkabel ist als „Betriebsspannung" E_*, die Spannung eines Leiters gegen den Sternpunkt zu setzen. Ist die Betriebskapazität für die Längeneinheit C, so wird in der Längeneinheit und in der Zeiteinheit durch dielektrischen Verlust die elektrische Leistung N_ε in Wärme umgesetzt:

$$N_\varepsilon = 3\, E_*^2\, \omega\, C \operatorname{tg} \delta. \tag{20}$$

(Die folgenden Betrachtungen beziehen sich durchweg auf die Längeneinheit des Kabels.)

Leider ist es bei dem Dreileiter-Kabel nicht möglich, die Rechnungen streng wie bei dem Einfach-Kabel, durchzuführen, wir müssen Vereinfachungen und Annahmen machen. Bei unserer Aufgabe handelt es sich ja auch im wesentlichen nicht darum, die Temperaturen mit möglichst großer Genauigkeit zu berechnen, sondern einen Anhalt für ihre Größenordnung zu bekommen.

Wir können nun die durch dielektrische Verluste erzeugte Wärme N_ε in zwei Teile zerlegen, nämlich in N_ε''', die in dem Felde der drei Leiter gegen den Mantel erzeugte Wärme, und in den Rest N_ε', die in dem Felde der drei Leiter gegeneinander erzeugte Wärme.

Wir betrachten nun zunächst jeden dieser Teile getrennt. Die durch N_ε''' hervorgebrachte Übertemperatur $\vartheta_i''' - \vartheta_m'''$ der Leiter über den Mantel ist, wie wir aus den Betrachtungen über das Einfachkabel wissen, völlig unabhängig von den Abmessungen des Kabels.

Es ist also nach Gleichung (10)

$$\vartheta_i''' - \vartheta_m''' = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon} \frac{E_*^2}{2}. \tag{21}$$

Erste Vereinfachung.

Für die Berechnung der durch N_ε' hervorgebrachten Übertemperatur $\vartheta_i' - \vartheta_m'$ benutzen wir in bekannter Weise die Bedingung, daß im Temperaturgleichgewicht die gesamte im Dielektrikum zwischen den drei Leitern in der Zeiteinheit erzeugte Wärme N_ε' durch jede Isotherme in der Zeiteinheit nach dem Bleimantel fließt. In der Nähe des Bleimantels sind die Isothermen Kreiszylinder, in der Nähe der Leiter kennen wir ihre Form nicht, doch können wir uns ein Ersatzkabel mit **einem** kreisförmigen konzentrischen Leiter denken, in dem die gleiche Wärme N_ε' etwa durch Stromwärme erzeugt wird und welcher die gleiche Übertemperatur ϑ_i annimmt wie die drei Leiter des wirklichen Kabels. Der Durchmesser des Leiters dieses Ersatzkabels sei 2x. Die Isothermen sind dann sämtlich Kreiszylinder mit dem Durchmesser 2r, wobei r variabel ist. Es gilt dann die Differentialgleichung (12) der Wärmeströmung

$$\frac{2\pi r}{\sigma_k}\frac{d\vartheta'}{dr} = -N_\varepsilon'.$$

Die Integration zwischen Leiter und Mantel ergibt dann nach Gleichung (13)

$$\vartheta_i' - \vartheta_m' = \frac{\sigma_k}{2\pi} N_\varepsilon' \ln\left(\frac{R}{x}\right). \tag{22}$$

Bezeichnet C, wie oben, die „Betriebskapazität" des Kabels, C''' die Kapazität der drei Leiter gegen den Mantel, so ist

$$N_\varepsilon' = N_\varepsilon - N_\varepsilon''' = 3\,E_*^2\,\omega\,C\,\mathrm{tg}\,\delta - E_*^2\,\omega\,C'''\,\mathrm{tg}\,\delta$$

$$N_\varepsilon' = 3\,E_*^2\,\omega\left(C - \frac{1}{3}C'''\right)\mathrm{tg}\,\delta. \tag{23}$$

Zweite Vereinfachung.

Die Kapazitäten C und C''' beim symmetrischen Drehstromkabel kann man aus den Abmessungen

a = Radius der Leiter,
d = Radius des Kreises, auf dem die Leitermitten liegen,
R = Innenradius des Bleimantels

unter der Voraussetzung angenähert berechnen, daß a erheblich kleiner ist als d und R — d, bei Hochspannungskabeln ist das im allgemeinen der Fall.

Es ist

$$C = \frac{\varepsilon \cdot 10^{-12}}{0{,}9\cdot(F-G)}\ \text{Farad/cm} \qquad C''' = \frac{3\cdot\varepsilon\cdot 10^{-12}}{0{,}9\cdot(F+2G)}\ \text{Farad/cm}, \tag{24}$$

hierin ist

$$F = \ln\left[\frac{R^2-d^2}{R\,a}\right]^2 \quad \text{und} \quad G = \ln\frac{R^4+R^2d^2+d^4}{3\,R^2d^2}.$$

Für die Auswertung mit dem Rechenschieber und für die weiteren Formeln ist es bequemer zu schreiben:

$$F = \ln U = \ln\left[\frac{(R/d)^2-1}{R/d}\right]^2 (d/a)^2 \quad \text{und} \quad G = \ln W = \ln\left\{\frac{1}{3}\left[\frac{(R/d)^2-1}{R/d}\right]^2+1\right\}$$

$$F - G = \ln U/W, \qquad F + 2G = \ln U\,W^2. \tag{25}$$

Dann wird nach Gleichung (22) bis (25)

$$\vartheta_i' - \vartheta_m = \frac{\sigma_k}{2\pi}\cdot 3\,E_*^2\cdot\frac{2\pi f\,\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta\cdot 10^{-12}}{0{,}9}\cdot\left(\frac{1}{\ln U/W} - \frac{1}{\ln U\,W^2}\right)\ln R/x.$$

Da hier nur Verhältnisse von natürlichen Logarithmen vorkommen, können wir statt der letzteren die Briggschen Logarithmen setzen; wir bezeichnen

$$Z = 12\left[\frac{1}{\log U/W} - \frac{1}{\log U\cdot W^2}\right]\log R/x. \tag{26}$$



Es ist dann, wenn wir diesen Wert einsetzen und uns des Wertes für den spezifischen Ersatzwiderstand ϱ_ε nach Gleichung (1) erinnern

$$\vartheta_i' - \vartheta_m' = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon} \frac{E_*^2}{2} Z. \qquad (27)$$

Erste Annahme.

Da in der Nähe der Leiter die von N_ε' herrührende Wärmeströmung nicht in denselben Bahnen verläuft, wie die von N_ε''' herrührende Wärmeströmung, dr mit ds also nicht zusammenfällt, können wir hier aus dem Bestehen der beiden linearen Differentialgleichungen nicht streng folgern, daß ihre Lösungen (21) und (27) sich einfach addieren. In erster Annäherung aber werden wir diese Annahme machen können. Es ist dann die durch die gesamten dielektrischen Verluste im Kabel erzeugte Übertemperatur der Leiter über den Bleimantel:

$$\vartheta_i - \vartheta_m = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon} \frac{E_*^2}{2} [1 + Z]. \qquad (28)$$

Die Übertemperatur ϑ_m des Bleimantels über die Erde ist dadurch bestimmt, daß die gesamte in der Betriebskapazität C in Wärme umgesetzte Energie N in der Zeiteinheit nach außen durch die Jutebespinnungen in das Erdreich wandern muß; es ist daher analog Gleichung (16) unter Berücksichtigung, daß die erzeugte Energie sich aus Gleichung (20), (24), (25) ergibt

$$\vartheta_m = 6 \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon} E_*^2 \frac{\ln \frac{D_a}{D_4} \frac{D_3}{D_2} + \frac{\sigma_n}{\sigma_k} \ln 4\, l/D_a}{\ln U/W},$$

wir setzen

$$Y = 12 \left[\frac{\log \frac{D_a}{D_4} \frac{D_3}{D_2} + \frac{\sigma_n}{\sigma_k} \log 4\, l/D_a}{\log U/W} \right]. \qquad (29)$$

dann ist

$$\vartheta_m = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon} \frac{E_*^2}{2} Y. \qquad (30)$$

Die Übertemperatur der Leiter über das Erdreich in weiterer Umgebung ergibt sich dann zu:

$$\vartheta_i = \frac{\sigma_k}{\varrho_\varepsilon} \frac{E_*^2}{2} [1 + Z + Y]. \qquad (31)$$

Zweite Annahme.

Um uns eine Vorstellung von der Größenordnung der auftretenden Übertemperaturen machen zu können, müssen wir noch eine Annahme über den Durchmesser 2x des Leiters des Ersatzkabels der ersten Vereinfachung machen. Dieser kreisförmige konzentrische Leiter sollte die gleiche Temperatur haben wie die drei Leiter, wenn in ihm die Wärme N_ε' (etwa durch Stromwärme) erzeugt würde, welche durch dielektrische Verluste in den Feldern zwischen drei Leitern hervorgebracht wird. Wir werden ungefähr das Richtige treffen, wenn wir $2x = 2d$ also gleich dem Durchmesser des Kreises wählen, auf dem die drei Leitermitten liegen (vgl. Bild 3). In der Gleichung (26) für Z haben wir dann $\log R/d$ für $\log R/x$ zu setzen.

In Bild 4 sind die Größen $1 + Z$ und $1 + Z + Y$ als Funktion der Isolationsstärke für einige Leiterquerschnitte graphisch dargestellt, wobei folgende Dicken angenommen sind:

Bleimantel	3	mm,
erste Jutebespinnung	3	mm,
Eisenblechbewehrung	2	mm,
Zweite Jutebespinnung	2	mm.

Man sieht aus dem Verhältnis der Größen $(1 + Z)$ und $1 + Z + Y$, daß bei der Erwärmung des Kabels durch dielektrische Verluste der Temperaturabfall von den Leitern zur Erde sich so verteilt, daß etwa $^1/_2$ bis $^2/_3$ auf das Kabelinnere und $^1/_2$ bis $^1/_3$ die Jutebespinnung und das Erdreich in der Umgebung des Kabels kommt. Die Verhältnisse liegen also bei dem Dreifachkabel umgekehrt wie bei dem Einfachkabel; es ist das auch einleuchtend: Beim Dreifachkabel wird noch Wärme durch dielektrische Verluste zwischen den Leitern, also in der Mitte des Kabels konzentriert, erzeugt, welche durch die Isolierschichten nach dem Bleimantel abgeleitet werden muß.

Bild 3.

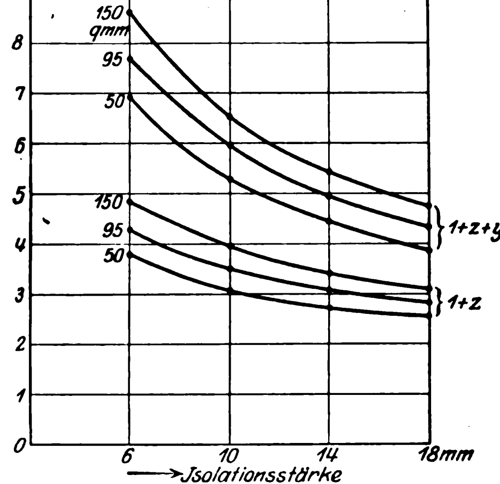


Bild 4. Zahlentafel für Dreileiter-Kabel.

Würde der willkürlich gleich 2d gesetzte Durchmesser des konzentrischen kreisförmigen Ersatzleiters, den wir für die Berechnung der Temperaturerhöhung durch die Verluste zwischen den Leitern benutzten, um 21% zu groß bzw. zu klein gewählt sein, so würde Z durchweg um 1,0 zu klein bzw. zu groß berechnet sein. Für die Größenordnung der Übertemperatur spielt dies aber noch keine wesentliche Rolle.

Sehen wir nun an einigen Beispielen, von welcher Größenordnung sich die Temperaturen bei üblichen Kabeln ergeben.

Wir wählen wieder die Frequenz $f = 50$, die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 3,5$ und $\operatorname{tg}\delta = 0,02$; dann ist ϱ_ε rund $0,50 \cdot 10^{12}$ $\sigma_k = 550$, die verkettete Spannung geben wir in kV an und bezeichnen die Maßzahl mit V, so daß $E_*^2 = \frac{1}{3} 10^6 V^2$ ist, dann wird aus Gleichung (31)

$$\vartheta_i = 0,18 \cdot 10^{-3} V^2 (1 + Z + Y). \tag{31}$$

Beispiel.

Leiterquerschnitt	150 qmm	95 qmm,
Isolationsstärke	5,5 mm	11,5 mm,
Verk. Spannung V	10 kV	25 kV,
$1 + Z + Y$	9,0	5,6,
ϑ_i	0,16° C	0,63° C.

Man sieht, die Erwärmung durch dielektrische Verluste kann bei Dreifachkabeln bis 25 kV vernachlässigt werden, wenn der Verlustwinkel unter der als zulässig angesehenen Grenze $\operatorname{tg}\delta < 0,02$ bleibt.

Die Eigenfrequenzen einlagiger Spulen.

Einige Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn K. W. Wagner.

Von

J. Kruithof, Rotterdam.

In seinem Aufsatz im Archiv für Elektrotechnik, Band VI, S. 301—325, berechnet Wagner mit Hilfe eines vereinfachten Schemas die Spannungsverteilung und die Eigenfrequenzen einer einlagigen Drahtspule. Das Merkwürdige der Ergebnisse, die er erhält, ist, wie schon früher von Rogowski in einem Absatz (A. f. E. Bd. VII, S. 240) bemerkt wurde, daß Wagner nur Frequenzen der sogenannten ersten Art findet, und nicht, wie Rogowski bei seiner Behandlung der Spule aus wenigen Windungen, Frequenzen erster und zweiter Art.

Auch andere Autoren, wie z. B. Lenz (Annalen der Physik, **43**, S. 749 ff.) finden die beiden Arten von Eigenschwingungen, während Wagner auch noch eine sogenannte „Kritische Frequenz" findet, eine Grenzfrequenz für die Eigenfrequenzen einer Spule.

Auf den folgenden Seiten findet man die Berechnung von neuem ausgeführt an der Hand von Wagners Kettenschema, wobei wir auch dessen Notationen behalten haben; nennen wir nur den Anfangs- und Endstrom J_0 und J_{e+1}.

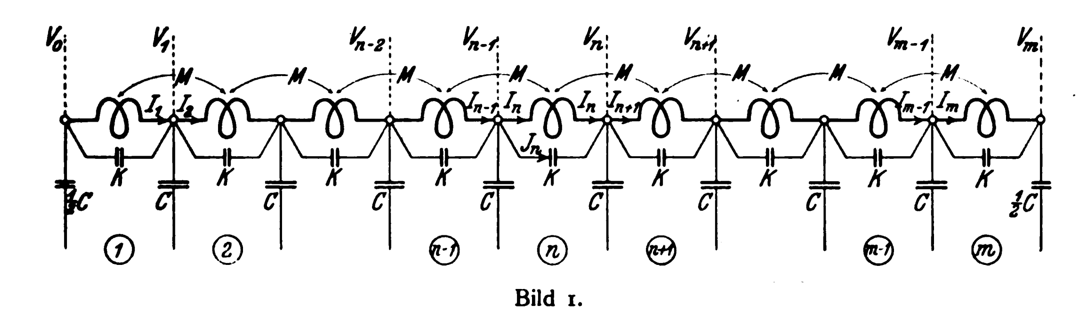


Bild 1.

Es wird sich zeigen, daß die Eigentümlichkeiten von Wagners Berechnung ihren Ursprung finden in einigen beschränkenden Annahmen.

Für jede Windung kann man schreiben:

$$V_{n-1} - V_n = j\omega L J_n + j\omega M (J_{n-1} - J_n) + j\omega M (J_{n+1} - J_n). \tag{1}$$

Man erhält ebensoviele Gleichungen, wie es Windungen gibt, also m. Jedoch ändert diese Gleichung sich für den Anfang und das Ende, dann wird sie:

$$\left.\begin{aligned} V_0 - V_1 &= j\omega L J_1 + j\omega M (J_2 - J_1) \\ V_{m-1} - V_m &= j\omega L J_m + j\omega M (J_{m-1} - J_m) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Für jeden Knotenpunkt findet man:

$$J_n - J_{e+1} = j\omega C V_n - j\omega K (V_{n-1} - V_n) - j\omega K (V_{n+1} - V_n), \tag{3}$$

für die beiden Enden:

$$\left.\begin{aligned} J_0 - J_1 &= \frac{1}{2} j\omega C V_0 - j\omega K (V_1 - V_0) \\ J_m - J_{m+1} &= \frac{1}{2} j\omega C V_m - j\omega K (V_{m-1} - V_m) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir haben also zwei Reihen von Gleichungen, (1) und (3), jede mit einer besonderen Anfangs- und Endgleichung; da es m-Windungen und m + 1-Knotenpunkte gibt, haben wir total 2 m + 1-Gleichungen.

Zur Lösung dieser substituiert man in (1) und (3)

$$V_n = A e^{\mu n} \quad \text{und} \quad J_n = B e^{\mu n}, \tag{5}$$

und findet zwei Gleichungen in A und B:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{-j\omega e^{\frac{\mu}{2}}}{2\sin h\frac{\mu}{2}}\left(L + 4M\sin h^2\frac{\mu}{2}\right) \\ \frac{B}{A} &= \frac{-j\omega e^{-\frac{\mu}{2}}}{2\sin h\frac{\mu}{2}}\left(C - 4K\sin h^2\frac{\mu}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

welche zusammen:

$$4\sin h^2\frac{\mu}{2} = -\omega^2\left(L + 4M\sin h^2\frac{\mu}{2}\right)\left(C - 4K\sin h^2\frac{\mu}{2}\right). \tag{7}$$

Hieraus wird $\sin h^2\frac{\mu}{2}$ gelöst, wobei man vier Werte findet, übereinstimmend mit μ_1, $-\mu_1$, $j\mu_2$ und $-j\mu_2$.

(5) wird also:

$$\left.\begin{aligned} V_n &= A_1 e^{\mu_1 n} + A_2 e^{-\mu_1 n} + A_3 e^{j\mu_2 n} + A_4 e^{-j\mu_2 n} \\ J_n &= B_1 e^{\mu_1 n} + B_2 e^{-\mu_1 n} + B_3 e^{j\mu_2 n} + B_4 e^{-j\mu_2 n} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Zur Bestimmung dieser acht Koeffizienten A_1, B_1, A_2, B_2 usw. genügen vier Gleichungen, weil zwischen jedem A und B die Beziehung (6) besteht. Sie müssen so gestaltet werden, daß die allgemeine Lösung (8) von (1) und (3) auch genügt für (2) und (4).

Wagner wählt für diese Bedingungen:

Der Anfang der Spule wird an eine EMK. E gelegt, das Ende wird geerdet.

Für die zwei übrigen werden die Anfangs- und Endgleichung der ersten Serie, also die beiden unter (2) gewählt.

Hierin liegt etwas Willkürliches. Erstens: Wird Wagners Lösung den beiden anderen Gleichungen (4) genügen? Zweitens: Die Eigenschwingung muß durch das Erden des Endes der Spule sich ändern. Die Ladung der Spule, die Menge der schwingenden Elektrizität ist nicht konstant. Durch das Erden kann jetzt ein Ladstrom auf die Spule fließen, und die Bedingung, daß die Ladung konstant bleiben soll — wie Lenz annimmt — ist nicht erfüllt.

Geiß bestätigte experimentell den Satz, daß die Eigenschwingung einer langen Spule bei Erdung des Endes doppelt so groß ist, als wenn man sie nicht erdet (Annalen der Physik 1921, S. 375 ff.).

Deshalb habe ich die Koeffizienten A und B von neuem berechnet und dazu als vier Bedingungen die Gleichungen (2) und (4) angenommen.

Wie schon gesagt wurde, haben wir 2 m + 1-Gleichungen. Die Anzahl der unbekannten Größen ist 2 m + 3; nämlich pro Windung ein Strom, der Anfangs- und Endstrom und pro Knotenpunkt eine Spannung.



Zwei von diesen dürfen wir als bekannt annehmen. Wir wählen dazu J_0 und J_{m+1}.

Die Lösung (8) substituiert in (2) und (4) ergibt, wenn sie in ihrer einfachsten Gestalt geschrieben wird:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= A_1 D_1 + A_2 D_2 + A_3 D_3 + A_4 D_4 \\ \frac{2 J_0}{j \omega C} &= A_1 E_1 + A_2 E_2 + A_3 E_3 + A_4 E_4 \\ 0 &= A_1 D_1 e^{\mu_1 m} + A_2 D_2 e^{-\mu_1 m} + A_3 D_3 e^{j \mu_2 m} + A_4 D_4 e^{-j \mu_2 m} \\ \frac{2 J_{m+1}}{j \omega C} &= A_1 E_1 e^{\mu_1 m} + A_2 E_2 e^{-\mu_1 m} + A_3 E_3 e^{j \mu_2 m} + A_4 E_4 e^{-j \mu_2 m} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

In diesen Gleichungen bedeutet:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= j \omega \left(C - 4 K \sin^2 h \frac{\mu_1}{2} \right) \\ E_1 &= - \cot h \frac{\mu_1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die Bedeutung von D_2, E_2 usw. findet man durch das Zersetzen von μ_1 durch $-\mu_1$, $j \mu_2$ und $-j \mu_2$. Aus (9) sollen nun die vier Koeffizienten gelöst werden. Man würde fünf Determinanten zu berechnen haben, und weil D_1, E_1 usw. nur Abkürzungen sind, würde die Lösung unüberwindliche Schwierigkeiten bieten.

Weil aber zwischen den Abkürzungen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= D_2 \\ D_3 &= D_4 \\ E_1 &= - E_2 \\ E_3 &= - E_4 \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

bestehen, suchte ich eine einfachere Lösung dieser fünf Determinanten.

Das folgende allgemeingültige Gesetz wurde gefunden:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ j & k & l & m \\ o & p & q & r \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & c & d \\ \underline{e} & \underline{f} & g & h \\ & \times & & \\ j & k & \underline{l} & \underline{m} \\ o & p & \underline{q} & \underline{r} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & c & d \\ e & f & \underline{g} & \underline{h} \\ & \times & & \\ \underline{j} & \underline{k} & l & m \\ o & p & \underline{q} & \underline{r} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & c & d \\ e & f & \underline{g} & \underline{h} \\ & \times & & \\ j & k & \underline{l} & \underline{m} \\ \underline{o} & \underline{p} & q & r \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a & b & \underline{c} & \underline{d} \\ \underline{e} & \underline{f} & g & h \\ & \times & & \\ \underline{j} & \underline{k} & l & m \\ n & o & \underline{p} & \underline{q} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & \underline{c} & \underline{d} \\ \underline{e} & \underline{f} & g & h \\ & \times & & \\ j & k & \underline{l} & \underline{m} \\ \underline{n} & \underline{o} & p & q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & \underline{c} & \underline{d} \\ e & f & \underline{g} & \underline{h} \\ & \times & & \\ \underline{j} & \underline{k} & l & m \\ \underline{n} & \underline{o} & p & q \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} \underline{a} & \underline{b} & c & d \\ e & f & \underline{g} & \underline{h} \\ & \times & & \\ \underline{j} & \underline{k} & l & m \\ n & o & \underline{p} & \underline{q} \end{vmatrix}$$ bedeutet dabei:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ j & k \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} g & h \\ q & p \end{vmatrix},$$

das Produkt von zwei Unterdeterminanten.

Die Rechnung wird jetzt ziemlich einfach. Die Nennerdeterminante N wird:

$$N = -4 [2 D_1 D_3 E_1 E_3 - 2 D_1 D_3 E_1 E_3 \cos h \mu_1 m \cos h j \mu_2 m + (D_1^2 E_3^2 + D_3^2 E_1^2) \sin h \mu_1 m \sin h j \mu_2 m] \quad (12)$$

und die Koeffizienten:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{4 D_3}{j\omega C \cdot N}\left[J_0\{(D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m + D_1 E_3 \cos h\, j \mu_2 m)\, e^{-\mu_1 m} - D_1 E_3\} + \right.\\
&\quad \left. + J_{m+1}\{-(D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m - D_1 E_3 \cos h\, j \mu_2 m) - D_1 E_3\, e^{-\mu_1 m}\}\right]\\
A_2 &= \frac{4 D_3}{j\omega C \cdot N}\left[J_0\{(D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m - D_1 E_3 \cos h\, j \mu_2 m)\, e^{\mu_1 m} + D_1 E_3\} + \right.\\
&\quad \left. + J_{m+1}\{-(D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m + D_1 E_3 \cos h\, j \mu_2 m) + D_1 E_3\, e^{\mu_1 m}\}\right]\\
A_3 &= \frac{4 D_1}{j\omega C \cdot N}\left[J_0\{D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m + D_3 E_1 \cos h\, \mu_1 m)\, e^{-j \mu_2 m} - D_3 E_1\} + \right.\\
&\quad \left. + J_{m+1}\{-(D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m - D_3 E_1 \cos h\, \mu_1 m) - D_3 E_1\, e^{-j \mu_2 m}\}\right]\\
A_4 &= \frac{4 D_1}{j\omega C \cdot N}\left[J_0\{D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m - D_3 E_1 \cos h\, \mu_1 m)\, e^{j \mu_2 m} + D_3 E_1\} + \right.\\
&\quad \left. + J_{m+1}\{-(D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m + D_3 E_1 \cos h\, \mu_1 m) + D_3 E_1\, e^{j \mu_2 m}\}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Die Koeffizienten A sind jetzt bekannt und nach Substitution in die allgemeine Lösung (8) können wir V_n schreiben als $f(J_0, J_{m+1})$. Zum besseren Vergleich mit **Wagners** Lösung und weil meistens die Anfangsspannungen und nicht die Anfangsströme gegeben sind, wollen wir jetzt die Lösung umarbeiten zu $V_n = f(V_0, V_m)$.

Zu diesem Zwecke setzen wir in $V_n = f(J_0, J_{m+1})$, die gefundene Lösung, $m = 0$ und $n = m$; wir finden:

$$\left.\begin{aligned}
V_0 &= \frac{8(D_3 - D_1)}{j\omega C \cdot N}\{-J_0 (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m \cos h\, j \mu_2 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m \cos h\, \mu_1 m)\\
&\quad + J_{m+1} (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m)\}\\
V_m &= \frac{8(D_3 - D_1)}{j\omega C \cdot N}\{-J_0 (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m) + \\
&\quad + J_{m+1} (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m \cos h\, j \mu_2 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m \cos h\, \mu_1 m)\}.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen können wir J_0 und J_{m+1} als $f(V_0, V_m)$ schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
J_0 &= \frac{j\omega C}{2 \sin h\, \mu_1 m \cdot \sin h\, j \mu_2 m}\,\frac{1}{D_3 - D_1}\{V_0 (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m \cos h\, j \mu_2 m - \\
&\quad - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m \cos h\, \mu_1 m) - V_m (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m)\}\\
J_{m+1} &= \frac{j\omega C}{2 \sin h\, \mu_1 m \cdot \sin h\, j \mu_2 m}\,\frac{1}{(D_3 - D_1)}\{V_0 (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m)\\
&\quad - V_m (D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m \cos h\, j \mu_2 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m \cos h\, \mu_1 m)\},
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

wobei sich zeigt daß:

$$\left.\begin{aligned}
N &= -\frac{4}{\sin h\, \mu_1 m \sin h\, j \mu_2 m}\{(D_1 E_3 \sin h\, \mu_1 m \cos h\, j \mu_2 m - \\
&\quad - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m \cos h\, \mu_1 m)^2 - (D_1 D_3 \sin h\, \mu_1 m - D_3 E_1 \sin h\, j \mu_2 m)^2\}.
\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Substituieren wir jetzt (15) in (13) und die so gefundenen Koeffizienten A in (8), so bekommen wir die Lösung $V_n = f(V_0, V_m)$:

$$\left.\begin{aligned}
V_n &= \frac{1}{(D_3 - D_1)}\left[V_0 \left\{D_3 \frac{\sin h\, \mu_1 (m-n)}{\sin h\, \mu_1 m} - D_1 \frac{\sin \mu_2 (m-n)}{\sin \mu_2 m}\right\} + \right.\\
&\quad \left. + V_m \left\{D_3 \frac{\sin h\, \mu_1 n}{\sin h\, \mu_1 m} - D_1 \frac{\sin \mu_2 n}{\sin \mu_2 m}\right\}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Die Koeffizienten B sind aus (13) und (6) bekannt als $f(J_0, J_{m+1})$; mit Hilfe von (15) als $f(V_0, V_{m+1})$.

Die Lösung $J_n = f(V_0, V_m)$ wird:

$$J_n = \frac{D_1 D_3}{2(D_1 - D_3)} \left[V_0 \left\{ \frac{\cos h\, \mu_1 \left(m - n + \frac{1}{2}\right)}{\sin h\, \mu_1 m \sin h \frac{\mu_1}{2}} + \frac{\cos \mu_2 \left(m - n + \frac{1}{2}\right)}{\sin \mu_2 m \sin \frac{\mu_2}{2}} \right\} - V_m \left\{ \frac{\cos h\, \mu_1 \left(n - \frac{1}{2}\right)}{\sin h\, \mu_1 m \sin h \frac{\mu_1}{2}} + \frac{\cos \mu_2 \left(n - \frac{1}{2}\right)}{\sin \mu_2 m \sin \frac{\mu_2}{2}} \right\} \right]. \tag{18}$$

Es muß bemerkt werden, daß diese allgemeine Lösung übergeht in die von Wagner, wenn man

$$\left. \begin{array}{l} V_0 = E \\ V_m = 0 \end{array} \right\}$$

setzt.

Folglich sehen wir, daß Wagners Lösung den beiden Bedingungen (4) nicht widerspricht. Die Ursache hiervon ist, daß mit diesen zwei Gleichungen (4) auch zwei unbekannte Größen, J_0 und J_{m+1} eingeführt werden.

Wenn wir die beiden Reihen von Gleichungen (1) und (3) ohne die beiden unter (4) lösen wollen, dürfen wir also wieder zwei Größen, z. B. V_0 und V_m wählen. Die Beziehungen zwischen J_0, J_{m+1} und V_0, V_m werden von den zwei nicht gebrauchten Gleichungen (4) geliefert.

Eigenfrequenzen.

Aus meiner allgemeinen Lösung von Wagners Kettenspule läßt sich auf einfacher Weise beweisen:

1. Es gibt Eigenfrequenzen der 1. Art;
2. Es gibt Eigenfrequenzen der 2. Art;
3. Die Eigenfrequenzen der 2. Art liegen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Frequenzen der 1. Art;
4. Auf Grund der Experimente von Geiß (Erden des Endes der Spule) sollen unsere Eigenfrequenzen der 1. Art etwa die Hälfte von denen sein, die Wagner fand.

Bei den Frequenzen 1. Art hat die Spannung des Spulenanfangs das entgegengesetzte Vorzeichen wie die Spannung des Spulenendes. Wir dürfen also schreiben $V_0 = E$ und $V_m = -E$.

Die Spannungsverteilung wird jetzt [siehe (17)]:

$$V_n = \frac{E}{D_3 - D_1} \left[D_3 \frac{\sin h\, \mu_1 \left(\frac{m}{2} - n\right)}{\sin h\, \mu_1 \frac{m}{2}} - D_1 \frac{\sin \mu_2 \left(\frac{m}{2} - n\right)}{\sin \frac{\mu_2 m}{2}} \right]. \tag{19}$$

$V_n = \infty$, die Bedingung für Eigenfrequenzen, wenn

$$\sin \frac{\mu_2 m}{2} = 0. \tag{20}$$

($D_3 - D_1 = 0$ gibt imaginäre Frequenzen)

oder:

$$\frac{\mu_2 m}{2} = K\pi,$$

k eine ganze Zahl.

$$\frac{\mu_2}{2} = \frac{k\pi}{m}.$$

Mit Hilfe von (7):

$$\omega_{K1} = \frac{2 \sin \frac{k\pi}{m}}{\sqrt{\left(L - 4 M \sin^2 \frac{k\pi}{m}\right)\left(C + 4 K \sin^2 \frac{k\pi}{m}\right)}}. \tag{21}$$

Diese Formel gibt eine Serie von Eigenfrequenzen, die der 1. Art; es zeigt sich, daß den beiden Prämissen 1⁰ und 4⁰ genügt ist. Solange es sich um kleine Werte der $\sin \frac{k\pi}{m}$ handelt, sind diese Frequenzen etwa die Hälfte von denen, die Wagner fand, d. h.:

$$\omega_K = \frac{2 \sin \frac{k\pi}{2m}}{\sqrt{\left(L - 4 M \sin^2 \frac{k\pi}{2m}\right)\left(C + 4 K \sin^2 \frac{k\pi}{2m}\right)}}.$$

Um die Eigenfrequenzen der 2. Art zu finden, dürfen wir $V_0 = V_m = E$ setzen, wodurch diese charakterisiert sind. Die Spannungsverteilung wird jetzt [siehe (17)]:

$$V_n = \frac{E}{D_3 - D_1}\left[D_3 \frac{\cos h\, \mu_1\left(\frac{m}{2} - n\right)}{\cos h \frac{\mu_1 m}{2}} - D_1 \frac{\cos \mu_2\left(\frac{m}{2} - n\right)}{\cos \frac{\mu_2 m}{2}}\right].$$

Und wieder wird $V_n = \infty$, wenn

$$\cos \frac{\mu_2 m}{2} = 0,$$

oder

$$\frac{\mu_2 m}{2} = \pi\left(k + \frac{1}{2}\right) \qquad \frac{\mu_2}{2} = \pi \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)}{m}.$$

Ebenso mit Hilfe von (7):

$$\omega_{K2} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{m}\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left\{L - 4 M \sin^2 \frac{\pi}{m}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right\}\left\{C + 4 K \sin^2 \frac{\pi}{m}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right\}}}.$$

Diese Formel gibt die Eigenfrequenzen zweiter Art; der Prämisse 2 ist also genügt, und weil

$$k < k + \frac{1}{2} < k + 1$$

auch der unter 3⁰. Die Eigenfrequenzen der zweiten Art befinden sich immer zwischen zwei aufeinanderfolgenden der ersten Art.

Hiermit ist gezeigt, daß es zwischen den Lösungen von Lenz, Rogowski und Wagner keinen wesentlichen Unterschied gibt. Die drei untereinander so sehr verschiedenen Rechnungsweisen zeigen alle dasselbe Verhalten der Spule.

Kritische Frequenz.

Nur in diesem Punkte gibt Wagners Lösung noch einen wesentlichen Unterschied. Bisher hat sich experimentell das Vorhandensein einer Maximum-Eigenfrequenz noch nicht gezeigt. (Geiß und A. Gothe, A. f. E., IX., 1920, S. 1.)

Wagner betont diese Eigenschaft der Spule besonders; er schreibt (A. f. E., VI., S. 325, 7. Abs.):

„Das wichtigste Kennzeichen einer Spule ist das Vorhandensein einer sogenannten kritischen Frequenz. Wellen von niedriger Frequenz läßt die Spule im wesentlichen ungeschwächt durch, während sie Wellen, deren Frequenz oberhalb der kritischen liegt, kaum eindringen läßt."

Wie Wagner diese kritische Frequenz aus seiner Rechnung findet, ist ganz richtig; auf dieselbe Weise findet man sie aus unserer Lösung. Die Tatsache aber, daß der Spule dieses wichtige Kennzeichen fehlt, hat ihren Grund darin, daß Wagner sie mit seinem Kettenschema einführt, daß er die Spule in einzelne Windungen unterteilt. Mit diesem Schema muß man notwendig eine solche Grenzfrequenz finden, wie wir jetzt zeigen wollen.

Denken wir uns die Spule schwingend mit einer ihrer Eigenfrequenzen, so findet man auf ihr z. B. in verschiedenen Punkten keinen Strom. Links und rechts von solch einem Knotenpunkte bewegen die beiden Ströme sich dahin oder davon.

Daraus, daß Wagner den Strom auf verschiedenen Stellen einer Windung als denselben annimmt, geht hervor, daß der Stromknotenpunkt nur auf der Verbindungsstelle zweier Windungen sich befinden kann. Damit ist aber die maximale Anzahl dieser Knotenpunkte bestimmt. Ihre kleinste Entfernung voneinander ist die Windungslänge, weil sie nicht weiter aneinander rücken können.

In diesem Falle besteht Stromresonanz zwischen der Kapazität K und Induktivität L einer Windung; der Strom, der durch die Erdkapazität C fließt, wird dabei vernachlässigt, weil er außerordentlich klein ist. Im Beispiel von Wagner ist C etwa $\frac{1}{1000}$ von K.

Das Finden einer kritischen Frequenz hat also seine Ursache in der Verteilung der Spule in einzelne Windungen und in der Annahme konstanten Stromes innerhalb dieser.

Für niedrige Frequenzen darf dieses gestattet werden, aber nicht für die hohen, bei denen eine Grenzfrequenz auftreten soll.

Bei einer wirklichen Spule kann die Entfernung von zwei Stromknotenpunkten kleiner werden als die Windungslänge, und je näher sie aneinander liegen, desto größer wird der Unterschied sein zwischen Strömen in verschiedenen Punkten einer Windung.

Dennoch wird es eine besondere Frequenz in der Nähe von Wagners kritische Frequenz geben. Nehmen wir dazu die Spule, wie Lenz sie vereinfacht hat. Dieser denkt die Windungen vereint zu einem kontinuiien Zylinder, auf dem die Elektrizität bei der ersten Eigenfrequenz zwischen den beiden Enden hin- und herschwingt. Es läßt sich dann beweisen, daß die höheren Eigenfrequenzen harmonisch liegen. (O. Scàsz, A. d. P. 43.)

Aber auch in diesem Falle hat die Berechnung wenig Wert. Für solche hohe Frequenzen darf man die Windungen sich nicht mehr verschmelzen lassen, weil der Strom auf einer Windung nicht konstant ist.

Am besten sieht man dieses ein, wenn man sich auf jeder Windung zwei Stromknotenpunkte denkt, einen auf der linken Seite, wo sich also eine z. B. positive Ladung befindet, und einen auf der rechten Seite mit einer negativen Ladung.

Sind alle Windungen in derselben Lage, so befindet sich jetzt auf der ganzen linken Seite der Spule positive Ladung, während die rechte negative trägt.

Die Elektrizität schwingt also zwischen der linken und rechten Seite hin und her. Das Bild des elektrischen Feldes hat sich ganz geändert; die Schwingung findet von dieser Frequenz ab in der Querrichtung der Spule statt, und nicht mehr, wie Lenz auch für seine höheren Frequenzen annimmt, in der Längsrichtung.

Die Methode, befolgt von Rogowski für Spulen von wenig Windungen muß bei hohen Frequenzen in dieser Hinsicht richtige Ergebnisse geben.



Archiv für Elektrotechnik

XI. Band. 3. Heft. 1922.

Das magnetische Feld in den Lufträumen elektrischer Maschinen[1]).

Von

Rudolf Richter.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule in Karlsruhe.)

1. Einleitung.

Die Berechnung elektrischer Maschinen und die Beurteilung ihres Verhaltens im Betriebe stützt sich auf die Kenntnis des magnetischen Feldes in den Lufträumen der Maschine, besonders auf die Größe der aus der Oberfläche des Ankers und der Feldmagnete tretenden Induktionsflüsse und auf die Verteilung der Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang. Die genaue Berechnung dieses Feldes ist nur in ganz einfachen Fällen möglich, wie sie in der Praxis gewöhnlich nicht vorliegen. Man ist daher gezwungen, die Felder auf zeichnerischem Wege mit mehr oder weniger großer Genauigkeit zu ermitteln und aus diesen Feldbildern die für die Rechnung wichtigen Größen zu bestimmen. Man setzt dabei gewöhnlich voraus, daß das magnetische Feld in allen Ebenen senkrecht zur Maschinenachse dasselbe ist, um es in der Zeichenebene darstellen zu können. In Strenge ist das natürlich nur für eine unendlich lange Maschine richtig.

Die schätzungsweise Aufzeichnung des magnetischen Feldes wird erleichtert, wenn man außer den Induktionslinien auch die Niveaulinien zeichnet, die die Induktionslinien senkrecht schneiden müssen. Diese beiden Linienscharen unterteilen also das Feld in rechtwinklige Kurvenvierseite. Dabei empfiehlt sich nach dem Vorschlage von Rüdenberg[2]) und Th. Lehmann[3]), in diesen „ebenen Feldbildern" die Abstände der Induktions- und Niveaulinien so zu wählen, daß in jedem dieser Kurvenvierseite der mittlere Abstand der Niveaulinien gleich dem mittleren Abstande der Induktionslinien wird („Lehmannsches Verfahren"). Bei genügend feiner Unterteilung gehen dann die Kurvenvierseite in Quadrate über, weshalb man diese Feldbilder auch als „quadratische Bilder" bezeichnen kann. Der Hauptwert dieser quadratischen Bilder ist darin zu erblicken, daß sie sich, wie noch gezeigt werden soll, schnell und sicher verwerten lassen. Dieser Vorteil ist von Lehmann nicht genügend betont worden, und darauf ist es wohl auch zurückzuführen, daß das Lehmannsche Verfahren keine Verbreitung gefunden hat[4]). Lehmann beschränkt sich auf Felder, deren Pole und Nuten sich radial ins Unendliche erstrecken, ferner läßt er die elektrische Durchflutung außer acht, was in den meisten praktischen Fällen unzulässig ist.

[1]) Von dem hier behandelten Verfahren wird in den Übungen im Entwerfen elektrischer Maschinen an der Technischen Hochschule in Karlsruhe schon seit mehreren Jahren Gebrauch gemacht. Bei der Niederschrift der Arbeit war mir mein früherer Assistent Herr Dr.-Ing. K. Ott behilflich, dem ich besonders für die Aufzeichnung eines großen Teils der Feldbilder zu Dank verpflichtet bin.

[2]) Theorie der Kommutation. Voitsche Sammlung elektrotechn. Vorträge, Bd. X. S. 454.

[3]) Graphische Methode zur Bestimmung des Kraftlinienverlaufs in der Luft. Elektrotechn. Zeitschr. 1909, S. 995.

[4]) Auch Arnold machte in den letzten Auflagen seiner Bücher (vgl. Wechselstromtechnik III vom Jahre 1912, S. 178 und Wechselstromtechnik IV vom Jahre 1913, S. 76 und 91) keinen Gebrauch davon. Dasselbe gilt von La Cour in der Bearbeitung „Die Gleichstrommaschine I" vom Jahre 1919 (S. 132 und 150).

Das Lehmannsche Verfahren bedarf deshalb noch des Ausbaues, um es im Elektromaschinenbau zur Verbreitung zu bringen. Die Anwendung des Verfahrens soll zunächst allgemein behandelt, und dann soll an einigen wichtigen Beispielen seine Bedeutung für den Elektromaschinenbau gezeigt werden.

2. Anwendung des Lehmannschen Verfahrens im Elektromaschinenbau.

Wir denken uns zwei parallele Eisenflächen im Abstand δ, die sich nach allen Seiten ins Unendliche erstrecken mögen. Nehmen wir diese Flächen als Niveauflächen an, setzen also voraus, daß zwischen zwei beliebigen Punkten auf verschiedenen Eisenoberflächen dieselbe magnetische Spannung herrscht, so ist das magnetische Feld in dem Luftraume zwischen den Eisenflächen gleichförmig. Aus diesem Felde wollen wir ein Gebiet herausschneiden, das zwischen zwei parallelen Ebenen liegt, die senkrecht zu den Eisenoberflächen, also parallel zu den magnetischen Linien liegen und um die Länge l voneinander entfernt sind. Eine dieser beiden Ebenen möge mit der Papierebene zusammenfallen (Bild 1).



Bild 1. Einheitsröhre ($\beta = \delta$) zwischen parallelen ebenen Eisenflächen.

Bild 2. Einheitsröhren mit n = 4facher Unterteilung.

Betrachten wir in diesem Gebiet eine Induktionsröhre von rechteckigem Querschnitt, deren Röhrenwände einerseits durch die im Abstande l gedachten Ebenen, andrerseits durch zwei im Abstande β voneinander liegenden Ebenen (senkrecht zu jenen und den Eisenoberflächen, Bild 1) abgegrenzt werden, so ist der Querschnitt der Röhre

$$q = \beta l, \tag{1}$$

und der magnetische Widerstand der Röhre

$$r = \frac{\delta}{\beta l}. \tag{2}$$

Machen wir die Breite der Röhre gleich der Länge,

$$\beta = \delta, \tag{3}$$

so wird

$$r = \frac{1}{l}, \tag{4}$$

oder der Leitwert

$$\lambda = l. \tag{4'}$$

Alle Induktionsröhren zwischen den parallelen Ebenen im Abstande l, die die Bedingung (3) erfüllen, müssen denselben Induktionsfluß, den „Einheitsfluß“

$$\varphi = \lambda V = l V, \tag{5}$$

führen, worin V die magnetische Spannung zwischen den Eisenflächen ist. Das ganze Raumgebiet zwischen den Eisenflächen können wir in solche Röhren einteilen.

Wir erhalten den Fluß Φ durch einen Teil der Eisenfläche, der von den parallelen Ebenen im gegenseitigen Abstand l und den Wänden der Endröhren senkrecht zu jenen Ebenen (z. B. bei A und B in Bild 2) geschnitten wird, indem wir die Anzahl der Röhren des quadratischen Feldbildes abzählen und mit dem Einheitsfluß einer Röhre (Gleichung 5) multiplizieren. Der Fluß durch den betrachteten Teil der Eisenfläche ist also

$$\boldsymbol{\Phi = m l V}, \tag{6}$$

worin m die Anzahl der Röhren ist, durch die der Einheitsfluß (Gleichung 5) fließt, und die wir deshalb als Einheitsröhren bezeichnen können. m kann auch eine gebrochene Zahl sein. Den Bruch bestimmen wir, indem wir das Feldbild durch



weitere Niveau- und Induktionslinien derart unterteilen, daß die Spannung zwischen zwei benachbarten Niveaulinien

$$V' = \frac{V}{2}, \quad V'' = \frac{V}{4} \quad \text{usw.},$$

und der Fluß der entstehenden Teilröhren

$$\varphi' = \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi'' = \frac{\varphi}{4} \quad \text{usw.}$$

wird. In Bild 2 sind auf diese Art die ursprünglichen Röhren sowohl der Länge (δ) als der Breite (β) nach in je 4 Teile geteilt; jede Teilröhre führt den Fluß

$$\varphi'' = \frac{\varphi}{4}.$$

Die Zahl der Einheitsröhren, die z. B. in Bild 2 zwischen den Röhrenwänden bei A und B' liegen, ist

$$m = 3\tfrac{3}{4}.$$

Gewöhnlich sind die Eisenflächen nicht parallel, wie z. B. Polschuh- und Ankeroberfläche einer elektrischen Maschine (Bild 3a). Der Luftraum ist dann in rechtwinklige Kurvenvierseite einzuteilen, deren mittlere Breite β gleich der mittleren Länge δ ist, derart, daß

$$\int_{\delta} \frac{d\delta}{\beta'} = 1 \tag{3a}$$

wird, worin β' die veränderliche Breite längs der Röhre ist. Bei der Aufzeichnung des Feldbildes wird man die mittlere Breite β und die mittlere Länge δ abschätzen,

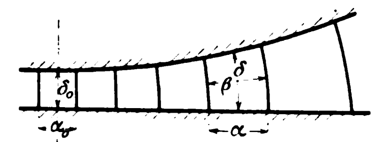


Bild 3a. Einheitsröhren ($\beta = \delta$) zwischen Polschuh- und Ankeroberfläche.

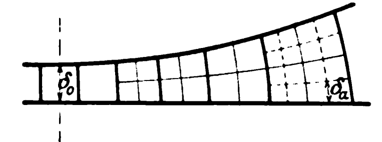


Bild 3b. Unterteilte Einheitsröhren (Gl. 9c).

was durch eine möglichst feine Unterteilung der Feld- und Niveaulinien (vgl. Bild 3b) erleichtert wird.

Die Gleichungen (1) bis (6) behalten auch in diesem Falle ihre Gültigkeit. Den in die Ankeroberfläche der Maschine eintretenden Fluß können wir wieder durch Abzählen der Röhren im quadratischen Bilde nach Gleichung (6) berechnen, wenn wir den Einfluß der Stirnflächen der Maschine unberücksichtigt lassen, also annehmen, daß das magnetische Feld in allen Ebenen senkrecht zur Achse dasselbe ist. Die Größe l ist dann die axiale Länge des Ankers.

Aus Gleichung (1) und (5) erhalten wir unter Berücksichtigung von Gleichung (3) die mittlere Induktion im mittleren Querschnitt einer Röhre zu

$$B = \frac{\varphi}{q} = \frac{V}{\delta}. \tag{7}$$

Unter der Mitte des Polschuhs ist bei Leerlauf die mittlere Länge der Induktionsröhre gleich dem Luftspalt δ_0 an dieser Stelle, weil die Mittellinie der Induktionsröhre mit der Mittellinie des Polschuhs zusammenfällt. Wir erhalten deshalb die magnetische Spannung V, die wir zur Berechnung des Flusses Φ in Gleichung (6) einzuführen haben, zu

$$\mathbf{V = B_0\,\delta_0}, \tag{8}$$

wenn B_0 die mittlere Induktion im Luftspalt unter der Polmitte ist. Diese weicht hier in den meisten praktischen Fällen nicht merklich von der Normalkomponente am Ankerumfang ab.

Bezeichnen wir wie früher mit B die mittlere Induktion einer Röhre über die mittlere Breite β, so ist der Mittelwert der Normalkomponente am Ankerumfang über die Breite α der Röhre (vgl. Bild 3a)

$$\mathbf{B_n = B \frac{\beta}{\alpha} = B_0 \frac{\delta_0}{\alpha}} \tag{9a}$$

oder, wenn wir den Mittelwert der Normalkomponente der Induktion über den Teil α_0 des Ankerumfangs unter der Polmitte

$$B_{n0} = B_0 \frac{\delta_0}{\alpha_0} \tag{10}$$

einführen,

$$\mathbf{B_n = B_{n0} \frac{\alpha_0}{\alpha}}. \tag{9b}$$

Die Gleichungen (9a) und (9b) gelten auch für die Teilröhren, wenn für δ_0, α_0, α und β die entsprechenden Längen und Breiten der Teilröhren eingeführt werden; sie stellen aber nur Mittelwerte über die Breite α der einzelnen Röhren oder Teilröhren am Ankerumfang dar. Den wirklichen Verlauf der Feldkurve könnte man durch eine Korrektion erhalten, wie sie Rüdenberg[1]) für die experimentelle Aufnahme von Feldkurven mit einer schmalen Prüfspule angegeben hat, wenn nicht die Ungenauigkeit in der Bestimmung der Abschnitte α im allgemeinen größer wäre als die Abweichungen der wirklichen Induktion von den berechneten Mittelwerten. Genauer als die Abschnitte α an der Ankeroberfläche ergeben sich in der Zeichnung des Feldbildes die Längen δ_a der Röhrenwandungen zwischen der Ankeroberfläche und der benachbarten Niveaulinie (Bild 3b). Deshalb empfiehlt es sich, die Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang nach der Näherungsgleichung

$$\mathbf{B_n \sim B_{n0} \frac{\delta_0}{n\,\delta_a}} \tag{9c}$$

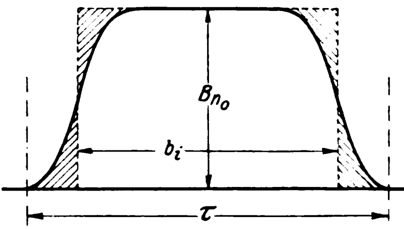


Bild 4. Zur Definition des ideellen Polbogens.

zu berechnen, worin n die Unterteilung der magnetischen Spannung an derjenigen Stelle des Luftspaltes ist, wo δ_a entnommen wird (für den in Bild 3b eingezeichneten Abstand δ_a ist $n = 4$). Um die Feldkurve ohne Korrektion möglichst genau zu erhalten, sind die Teilröhren der Rechnung zugrunde zu legen. Es ist hierbei jedoch zu beachten, daß eine zu feine Unterteilung des Feldbildes die Genauigkeit wiederum verringert, da die der Zeichnung zu entnehmenden Strecken dann nicht mehr genau abgemessen werden können.

Eine bequeme Rechengröße ist im Elektromaschinenbau der ideelle Polbogen. Es ist dies derjenige Bogen (b_i), der durch Multiplikation mit dem Höchstwert B_{n0} der Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang den Inhalt der Fläche bestimmt, die die Kurve der Normalkomponente der Induktion mit der Abszissenachse einschließt (Bild 4).

Dieser Polbogen läßt sich aus dem quadratischen Feldbilde ablesen, ohne die Verteilung der Induktion am Ankerumfang zu kennen, also ohne den Inhalt der Induktionswelle auszuwerten. Der in den Ankermantel eintretende Fluß ist nach Gleichung (6) und (8)

$$\Phi = m\,l\,B_0\,\delta_0. \tag{11}$$

Nach der Definition des ideellen Polbogens ist dieser Fluß

$$\Phi = l\,b_i\,B_{n0}, \tag{12}$$

woraus sich unter Berücksichtigung von Gleichung (10) und (11) der ideelle Polbogen zu

[1]) Über die experimentelle Aufnahme von Feldkurven. Elektrotechnik und Maschinenbau 1909, S. 1031.

$$\mathfrak{b}_l = \mathfrak{m}\,\alpha_0 \tag{13a}$$

ergibt. α_0 weicht in allen praktischen Fällen nicht merklich von δ_0 ab (vgl. Bild 3), deshalb gilt auch die Näherungsgleichung

$$\mathfrak{b}_l \sim \mathfrak{m}\,\delta_0. \tag{13b}$$

Um den ideellen Polbogen zu erhalten, hat man also nur die Anzahl der in den Ankermantel eintretenden Einheitsröhren abzuzählen und mit der Luftspaltbreite unter Polmitte zu multiplizieren.

Bei genuteter Ankeroberfläche schwankt die Induktion im Luftspalt, wenn sich der Anker unter den Polschuhen vorbeibewegt. Bei derselben magnetischen Spannung zwischen Ankeroberfläche und Polschuh ist die mittlere Induktion an irgendeiner Stelle im Luftspalt immer kleiner als bei einem ungenuteten Anker mit demselben Luftspalt. Bei der Aufzeichnung des Feldbilds kann man die genutete Ankerfläche durch eine glatte, auch bei umlaufendem Anker ruhende Fläche ersetzen. In Bild 12 ist z. B. für die im Abschnitt 4 betrachtete Gleichstrommaschine eine solche Fläche durch die gestrichelte Linie, die außerhalb des Polschuhbereichs von der stärkeren voll ausgezogenen Linie überdeckt wird, angedeutet. Der Abstand dieser Ersatzfläche vom äußeren Ankerumfang ist, wie sich nachweisen läßt, in der Pollücke praktisch ebenso groß wie unter dem Polschuh.

Bei genuteten Ankern ist die Ankeroberfläche aber keine Niveaufläche mehr, weil die magnetische Spannung längs der einzelnen Zähne im allgemeinen verschieden groß ist. Auch diesen Einfluß kann man durch eine entsprechende Verlängerung der einzelnen Induktionsröhren des Luftspalts berücksichtigen. Die mittlere Länge einer Induktionsröhre ist im Verhältnis der magnetischen Spannung längs Luft und Zahn zu der magnetischen Spannung längs Luft allein zu vergrößern. In Bild 12 ist für $B_{n0} = 10000$ cgs durch eine ganz ausgezogene Linie die glatte Ankeroberfläche angedeutet, die bei der Aufzeichnung des Feldbildes außer der Nutung auch der magnetischen Zahnbeanspruchung Rechnung trägt. Für andere Werte von B_{n0} ergeben sich auch andere Ersatzflächen.

Bei der Bestimmung der glatten Ersatzfläche muß zunächst die Feldverteilung so angenommen werden, wie sie sich bei Vernachlässigung der Spannung längs der Zähne ergibt. Es wird dann bei magnetisch stark beanspruchten Zähnen der Abstand der Ersatzfläche von der Polschuhoberfläche an den Stellen der kleinsten Luftspaltbreite (Polmitte) häufig größer, als an der Stelle, wo sich der Luftspalt etwas verbreitert. Bestimmt man nun für diese in erster Annäherung erhaltene glatte Ersatzfläche die Feldverteilung und legt diese der Bestimmung der Ersatzfläche zweiter Annäherung zugrunde, so erhält man wieder eine von der Polmitte nach der Pollücke allmählich wachsende Luftspaltbreite. Bild 12 stellt die in erster Annäherung erhaltene glatte Ersatzfläche dar.

Gewöhnlich wird man den Einfluß der magnetischen Beanspruchung der Zähne bei der Bestimmung der Feldverteilung und des ideellen Polbogens ganz außer acht lassen; man erhält dann einen etwas zu kleinen ideellen Polbogen, rechnet also sicher (vgl. den letzten Teil des Abschnitts 4). Dasselbe gilt auch bei Vernachlässigung der Nutung.

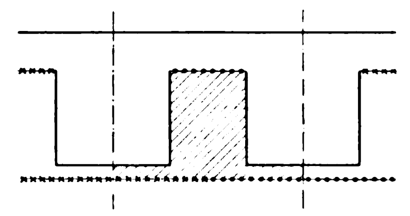
3. Berücksichtigung der Durchflutungen.

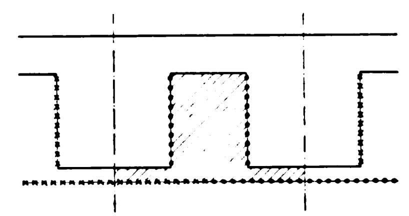
In den Lufträumen zwischen Anker und Polschuh und zwischen den Polkernen sind bei den elektrischen Maschinen die Wicklungen untergebracht. Die Lufträume werden also zum Teil elektrisch durchflutet, so daß das magnetische Feld zwischen den Eisenoberflächen der Maschine nicht mehr wirbelfrei ist. Um die in Abschnitt 2 beschriebene Auswertung der quadratischen Feldbilder auch für die von Strom durchflossene Maschine anwenden zu können, müssen wir die Durchflutungen auf die Eisenoberflächen der Maschine zusammendrängen. In den Lufträumen, die von

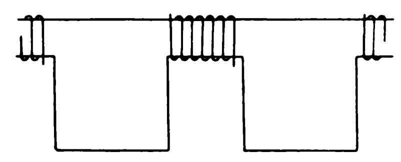


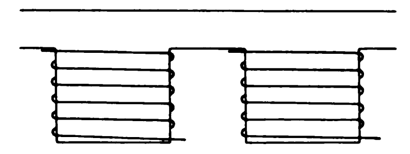
den jetzt flächenhaft verteilten Durchflutungen und den freien Eisenflächen begrenzt werden, ist dann das magnetische Feld wieder wirbelfrei, so daß wir das in Abschnitt 2 beschriebene Verfahren zur Aufzeichnung und Auswertung der quadratischen Feldbilder anwenden können.

Für die Wicklung des Ankers ist der Ersatz der in Wirklichkeit räumlich verteilten Durchflutung durch eine unendlich dünne Schicht, die bei einem glatten Anker am Mantel und bei genutetem Anker an der ungenuteten Ersatzfläche (vgl. Bild 12) liegt, allgemein üblich. Man bezeichnet diese auf die Längeneinheit des Ankerumfangs bezogene Strömung als Strombelag. Auch die Durchflutung des Feldmagneten läßt sich, ohne daß sich die Feldverteilung wesentlich ändert, durch einen Strombelag ersetzen, der entweder an der inneren Fläche des Joches (Bild 5a) oder an den Flanken der Polkerne (Bild 6a) liegt; er ist in den Bildern 5a und 6a durch Punkte und Kreuze bezeichnet. Der erste Fall entspricht einer Bewicklung des Joches, wie sie z. B. bei Maschinen der Comp. de l'Industrie Electrique, Genf üblich


Bild 5a. Ersatz der räumlichen Durchflutung durch einen Strombelag. Vgl. Bild 5b.


Bild 6a. Ersatz der räumlichen Durchflutung durch einen Strombelag. Vgl. Bild 6b.


Bild 5b. Feldmagnetwicklung auf den Jochen.


Bild 6b. Feldmagnetwicklung auf den Polkernen.

ist (Bild 5b); der zweite Fall entspricht der Bewicklung der Polkerne, wie sie gewöhnlich ausgeführt wird (Bild 6b). Innerhalb des in Bild 5a und 6a schraffierten Luftraumes ist das magnetische Feld wirbelfrei, so daß wir das quadratische Feldbild nach Abschnitt 2 aufzeichnen und auswerten können.

Der vom Strombelag begrenzte Flächenrand ist jetzt aber keine Niveaulinie mehr. Die magnetischen Spannungen zwischen den Enden der einzelnen Induktionsröhren sind im allgemeinen verschieden; die Induktionsröhren führen aber im quadratischen Feldbilde alle denselben Fluß, weil die zwischen benachbarten Niveau-

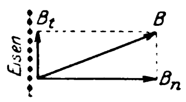


Bild 7. Richtung der Feldkomponenten im Luftraum, wenn $H_t' < 4\pi A$.

linien liegenden Teilröhren alle denselben magnetischen Widerstand haben. Die Feldlinien treten an den Stellen des Strombelags auch dann nicht mehr senkrecht aus, wenn die Tangentialkomponente der Feldstärke im Eisen vernachlässigt werden darf. An den von Strombelag begrenzten Flächenrändern sind deshalb die Quadrate des Feldbilds unvollständig (vgl. z. B. Bild 10).

Die Tangentialkomponente der Feldstärke erleidet an der Stromschicht einen Sprung, der im cgs-Maß gleich dem 4π-fachen des Strombelags ist:

$$H_t' - H_t = 4\pi A, \tag{14a}$$

wenn wir mit

$$H_t' = \frac{B_t'}{\mu}$$

die Tangentialkomponente der Feldstärke im Eisen, mit $H_t = B_t$ die im Luftraum bezeichnen und den Strombelag A positiv einführen, wenn er der Feldstärke im Eisen nach der Rechtsschraube zugeordnet ist. Aus Gleichung (14a) folgt

$$H_t = H_t' - 4\pi A. \tag{14}$$

In den meisten Fällen ist der Strombelag der Feldstärke im Eisen nach der Rechtsschraube zugeordnet und es ist

$$H_t' < 4\pi A;$$

H_t hat dann nach Gleichung (14) die entgegengesetzte Richtung wie H_t' und ist dem Strombelag A dann ebenfalls nach der Rechtsschraube zugeordnet. In Bild 7 z. B., wo der Strombelag an der rechten Seite der Eisenfläche liegt und die Strömung aus der Papierebene heraustritt, ist die Tangentialkomponente der Feldstärke im Luftraum nach oben gerichtet.

Die Normalkomponente der Induktion bleibt beim Durchgang durch die Stromschicht unverändert. An der Grenzfläche ist unabhängig vom Strombelag

$$B_n' = B_n = H_n. \tag{15}$$

Unter der Annahme, daß

$$H_t' = \frac{B_t'}{\mu} < 4\pi A,$$

sind in Bild 8a und b die Richtungen der Normalkomponente B_n, der Tangentialkomponente B_t und der resultierenden Induktion an der Grenze des Strombelags im Luftraum dargestellt. Bild 8a gilt für den Feldmagneten, Bild 8b für den Anker.

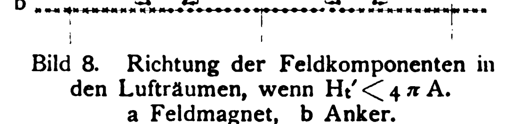


Bild 8. Richtung der Feldkomponenten in den Lufträumen, wenn $H_t' < 4\pi A$. a Feldmagnet, b Anker.

Das magnetische Potential wächst längs des Strombelags nach der Gleichung

$$\int_0^x H_t\, dx = V_0 - 4\pi A x + \int_0^x \frac{B_t'}{\mu} dx, \tag{16}$$

wenn die Richtung positiver x mit B_t' zusammenfällt und V_0 das magnetische Potential an der Stelle $x = 0$ ist. Bei Vernachlässigung des letzten Gliedes ($\mu = \infty$) wächst also das magnetische Potential längs der Stromschicht linear, sofern der Strombelag von x unabhängig ist. An den Eisenflächen, die keinen Strombelag tragen, ist es konstant. Die an den Strombelägen endigenden Niveaulinien mit gleichen Potentialunterschieden teilen deshalb die Stromschicht in gleiche Teile. Bei örtlich veränderlichem Strombelag teilen die Niveaulinien die Stromschicht so, daß benachbarte Niveaulinien gleiche Durchflutungen einschließen.

Die Winkel, unter denen die Niveaulinien an der Stromschicht endigen, sind im allgemeinen von 90^0 verschieden; sie schneiden aber auch hier die Feldlinien senkrecht. Der Verlauf der Niveaulinien im Luftraum muß in erster Annäherung geschätzt werden. Man zeichnet dann die Feldlinien in der im Abschnitt 2 beschriebenen Weise und erhält das quadratische Feldbild in erster Annäherung. Wenn man aus diesem Feldbilde die Normalkomponente der Feldstärke am Strombelag bestimmt und die Tangentialkomponente nach Gleichung (14) berechnet, so erhält man die Richtung der Feld- und Niveaulinien an der Stromschicht in zweiter Annäherung, mit der man das Feldbild zweiter Annäherung aufzeichnet. Man kann die Annäherung an das wirkliche Feldbild noch weiter fortsetzen, doch wird in den meisten Fällen die zweite Annäherung genügen; auch wird man gewöhnlich die

Tangentialkomponente der Feldstärke im Eisen H_t' vernachlässigen können. Schließlich begeht man auch keinen allzu großen Fehler, wenn man die Richtung der Feld- und Niveaulinien überhaupt nicht berechnet, sondern nur nach Schätzung aufzeichnet, wofür die Bilder 8a und b, sowie die Feldbilder in dieser Arbeit (Abschnitt 4—7), einen ungefähren Anhalt bieten.

4. Das Feld bei Leerlauf.

Die Bilder 9 und 10 stellen die nach Abschnitt 2 und 3 entworfenen Feldbilder einer 12poligen Gleichstrommaschine (800 kW, 225 Umdr. i. d. Min., Ankerdurchmesser 150 cm, Luftspalt $\delta_0 = 1$ cm) bei erregtem Feldmagneten und stromlosem Anker dar, wenn die Permeabilität des Eisens unendlich groß angenommen wird. Die Feldbilder sind dann unabhängig von der Größe des Strombelags, weil

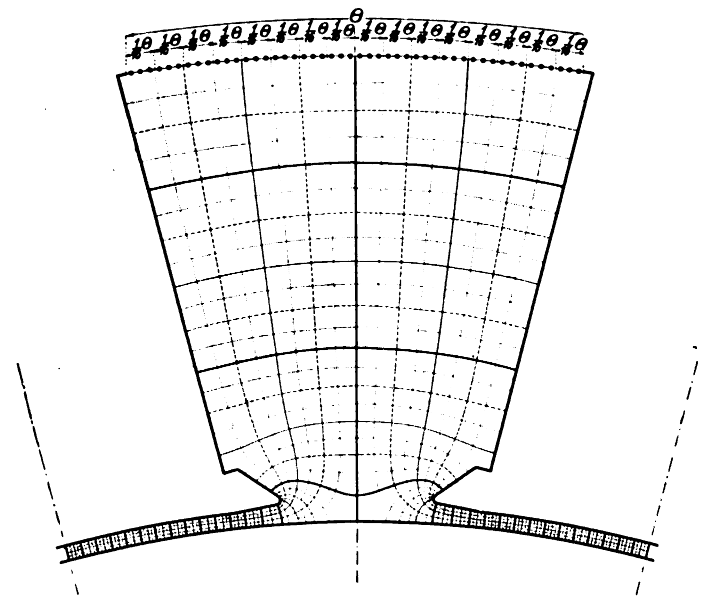


Bild 9. Feldbild bei Leerlauf. Wicklung auf den Jochen; glatter Anker; $\mu = \infty$.

nicht nur die Tangentialkomponente, sondern auch die Normalkomponente diesem proportional ist. Der die Durchflutung der Erregerwicklung ersetzende Strombelag ist durch Punkte angedeutet. Bild 9 entspricht einer gleichmäßigen Bewicklung des Joches (vgl. Bild 5a und b), während Bild 10 einer gleichmäßigen Bewicklung der Polkerne (vgl. Bild 6a und b) entspricht.

In beiden Bildern sind die Einheitsröhren unter dem Polbogen in 4, im übrigen in 8 Teilröhren unterteilt. Die Einheitsröhren werden von stärkeren Linien begrenzt; dünnere Linien teilen den Fluß und die magnetische Spannung der Einheitsröhren in 2 gleiche Teile, gestrichelte in 4 und punktierte in 8 gleiche Teile. Da im vorliegenden Falle die Induktion unter der Polmitte längs des Luftweges δ_0 (vgl. Bild 3, $\alpha_0 \sim \delta_0$) konstant angenommen werden kann, so teilen die Niveaulinien den Luftspalt δ_0 in gleiche Teile. Andrerseits teilen nach Abschnitt 3 die Niveaulinien auch die Durchflutung Θ, hier also die Stromschicht am Joch oder an den Polflanken, in gleiche Teile, wenn die Permeabilität des Eisens unendlich groß ist. Die Endpunkte der Niveaulinien liegen also fest, so daß die Feldbilder in der am Schlusse des letzten Abschnitts beschriebenen Weise entworfen werden können.

Die Mittelebene durch die Pollücke hat dasselbe magnetische Potential wie die Ankeroberfläche, bei Bild 10 auch wie die Jochoberfläche. An den Stellen, wo die

Niveaulinien gebrochen sind, d. i. z. B. in Bild 10 dort, wo die Mittellinie der Pollücke Anker- und Jochoberfläche schneidet, und an allen scharfen Kanten des Feldmagneten ist die Teilfläche im Feldbilde gewöhnlich ein Fünfeck, wie weit man auch die Unterteilung der Feld- und Niveaulinien fortsetzt. Beim Aufzeichnen der Feldbilder beginnt man in der Polmitte und zeichnet Feld- und Niveaulinien gleichzeitig. Dabei hat man zu beachten, daß die Niveaulinien ihren Endpunkten an der Stromschicht zustreben. Der Winkel, unter dem die Niveaulinien in Bild 10 in die Stromschicht eintreten, ist in der Nähe der Polwurzel 90^0, weil hier die Normal-

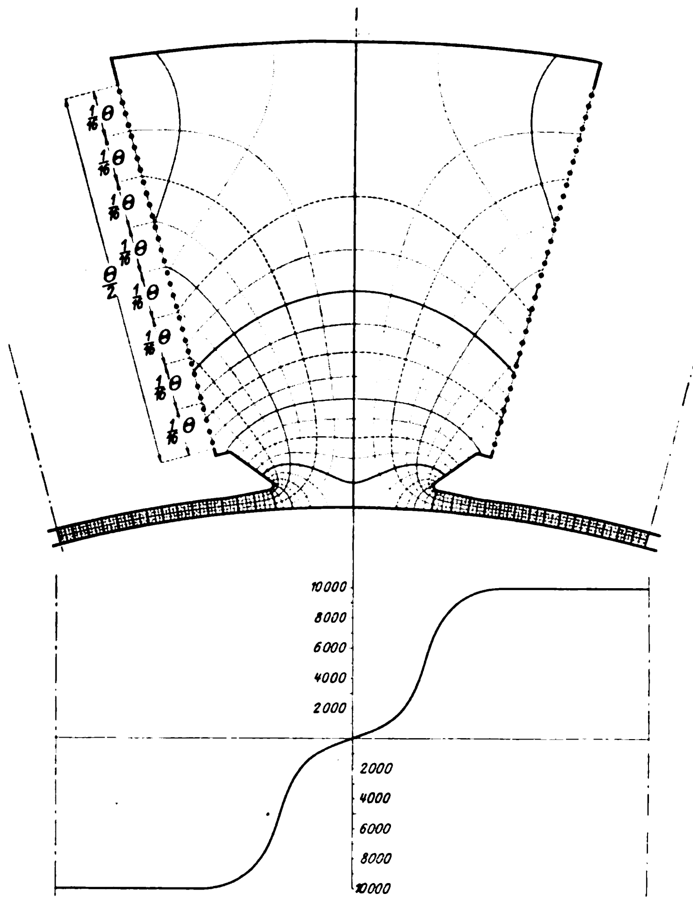


Bild 10. Feldbild bei Leerlauf. Wicklung auf den Polkernen; glatter Anker; $\mu = \infty$. Unten Normalkomponente am Ankerumfang.

komponente der Induktion Null ist; er wird mit wachsender Entfernung von der Polwurzel immer spitzer, entsprechend der Zunahme der Normalkomponente der Induktion (Stärke des Streufeldes).

Wir bestimmen den ideellen Polbogen b_i, indem wir nach Gleichung (13b) die Anzahl m der in den Ankermantel eintretenden Einheitsröhren abzählen und mit dem Luftspalt δ_0 multiplizieren. In Bild 9 ergibt sich für den halben Pol

$$14\,{}^7/_8 < \frac{m}{2} < 15.$$

Wir schätzen m zu 29,9 und erhalten mit $\delta_0 = 1$ cm

$$b_i = 29{,}9 \text{ cm}.$$

Denselben Polbogen b_i finden wir auch für Bild 10.

Die Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang läßt sich punktweise nach Gleichung (9a, b oder c) berechnen. In Bild 10 ist sie als Funktion des Ankerumfangs aufgetragen. Dieselbe Kurve erhalten wir für das Feldbild in Bild 9.

Für den Streufluß einer Polhälfte zählen wir in Bild 9

$$\frac{m}{2} = 2{,}55,$$

in Bild 10

$$\frac{m}{2} = 1{,}67$$

Einheitsröhren, die wir noch mit 2 multiplizieren müssen, um die Zahl der Einheitsröhren des Streuflusses eines Pols zu erhalten.

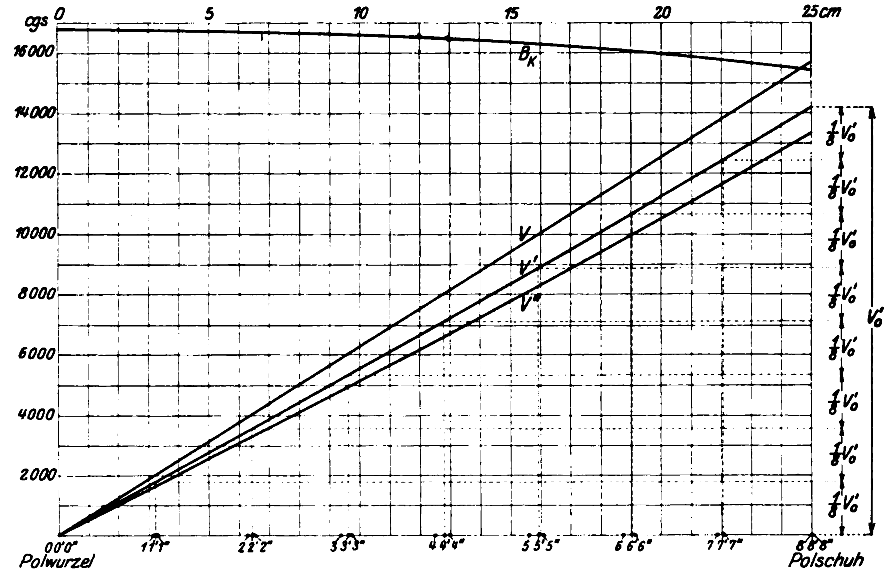


Bild 11. Magnetische Spannung im Luftraum längs der Stromschicht. V bei $\mu = \infty$; V' und V'' mit Berücksichtigung der Spannung im Polkern. V' bei $B_{K\,max} = 16800$, V'' bei $B_{K\,max} = 17500$ cgs.

Durch Vergleich der Ergebnisse aus beiden Feldbildern finden wir, daß die Lage des Strombelags keinen merklichen Einfluß auf den in den Ankermantel eintretenden Fluß, wohl aber auf den Streufluß hat.

In Wirklichkeit ist die Permeabilität μ des Eisens nicht unendlich groß, wie es beim Entwurf der Bilder 9 und 10 angenommen wurde, sondern besitzt einen endlichen Wert, der in den verschiedenen Querschnitten des Polkerns wegen der austretenden Streulinien und der damit sich ändernden Kerninduktion verschieden groß ist. Es ist dann auch der Wert $H_t' = \frac{B_t'}{\mu}$ in Gleichung (14) und (16) von Null verschieden. Die genauen Winkel, unter denen die Feld- und Niveaulinien aus der Stromschicht austreten, ergeben sich nach Abschnitt 3 aus der Normalkomponente und der nach Gleichung (14) zu bestimmenden Tangentialkomponente der Feldstärke am Strombelag. Die Niveaulinien teilen die Durchflutung jetzt nicht in genau gleiche Teile, da das Potential gemäß Gleichung (16) im allgemeinen nicht mehr linear anwächst.

Für das in Bild 10 dargestellte Feldbild ist in Bild 11 unter der Annahme einer Induktion von 16800 cgs an der Wurzel des Polkerns (entsprechend einer Induktion im Luftspalt $B_{n0} = 10000$ cgs bei der betrachteten Maschine) die Induktion



B_K längs des Polkerns aufgetragen; sie beträgt in der Nähe des Polschuhs 15400 cgs. Die Permeabilität im Polkern, der aus Stahlguß angenommen ist, wächst von $\mu = 184$ an der Wurzel bis zu $\mu = 535$ in unmittelbarer Nähe des Polschuhs.

Dem angenommenen magnetischen Zustand entspricht die Durchflutung des Kreises $\Theta = 25000$ Amp. Der Strombelag an der Polflanke ist dann bei einer bewickelten Polkernhöhe von 25 cm 500 A/cm = 50 cgs. Das magnetische Potential an der Stromschicht ist nach Gleichung (16) zu berechnen. Setzen wir es an der Wurzel des Polkerns gleich Null, so erhalten wir für die magnetische Spannung längs der Stromschicht im Luftraum bei Vernachlässigung der Polkernspannung die Gerade V in Bild 11, während die Kurven V' und V'' mit Berücksichtigung der Spannung längs des Polkerns gelten, und zwar V' für eine größte Kerninduktion von 16800 cgs, wie sie bei der betrachteten Maschine tatsächlich auftritt, und V'' für eine solche von 17500 cgs, wenn alle übrigen Verhältnisse unverändert bleiben.

Um die Stellen an der Stromschicht zu finden, wo die Niveaulinien endigen, müssen wir die Punkte an der Stromschicht bestimmen, die die magnetische Spannung zwischen Wurzel und Polschuh des Kerns auf der Seite des Luftgebiets in gleiche Teile teilen. Wir erhalten so bei achtfacher Unterteilung der Spannung die

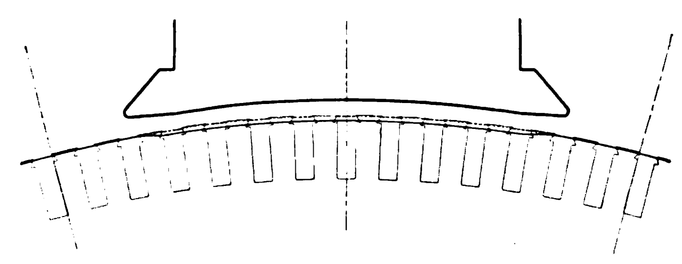


Bild 12. Glatte Ersatzflächen eines genuteten Ankers. ------ bei $\mu = \infty$; ——— mit Berücksichtigung der Permeabilität in den Zähnen.

Punkte 1, 1', 1'' bis 7, 7' 7'', die den Kurven V, V' und V'' entsprechen. Für die Kurve V' ist die Bestimmung dieser Punkte in Bild 11 angedeutet. Bei Berücksichtigung der Polkernspannung verschieben sich die Punkte, in denen die Niveaulinien an der Stromschicht endigen, nur in geringem Maße. Ebenso findet man, daß die Winkel, unter denen die Feldlinien austreten, nur sehr wenig von denen abweichen, die sich für eine unendlich große Permeabilität im Polkern (Polkernspannung gleich Null) ergeben. Das gesamte Feldbild wird deshalb durch die Polkernspannung nicht merklich beeinflußt, so daß es in allen praktischen Fällen völlig ausreichend ist, die Bilder für $\mu = \infty$ im Feldmagneten zu entwerfen.

Die Nutung des Ankers und die Spannung längs der Zähne können wir nach Abschnitt 2 durch eine Verbreiterung des Luftspalts berücksichtigen. Die hier behandelte Maschine hat offene Nuten mit den Verhältnissen Nutbreite zu Zahnkopfbreite gleich $\frac{1,20}{1,71} = 0,702$ und Nutbreite zu Luftspaltbreite gleich $\frac{1,20}{1,00} = 1,20$ unter dem Polbogen konstanter Luftspaltbreite. Die glatte Fläche, durch die die genutete Ankeroberfläche bei der Aufzeichnung des Feldbilds zu ersetzen ist, ist in Bild 12 gestrichelt gezeichnet. Unter dem Polbogen konstanter Luftspaltbreite ist sie 8 v. H. größer als beim ungenuteten Anker (Carterscher Faktor gleich 1,08); ihr Abstand vom äußeren Ankerumfang ist längs des Ankerumfangs praktisch derselbe.

Bei einer mittleren Luftspaltinduktion von 10000 cgs unter dem Polbogen konstanter Luftspaltbreite und einer Nuttiefe von 4,25 cm wird die maximale (wirkliche) Zahninduktion (an der Zahnwurzel) 21500 cgs. Für diese Verhältnisse stellt die in Bild 12 voll ausgezogene starke Linie die in erster Annäherung (vgl. S. 87) gefundene glatte Ersatzfläche des Ankers dar, die sowohl der Nutung als auch der Zahnsättigung Rechnung trägt.

Bild 13 zeigt das für diese Ersatzfläche und unter Berücksichtigung der Polkernspannung entworfene Feldbild. Seine Auswertung ergibt einen um 3,3 v. H. größeren ideellen Polbogen als das Feldbild in Bild 10, das für einen ungenuteten Anker und für eine unendlich große Permeabilität im Eisen gilt. Bei Vernachlässigung der Nutung und der Eisensättigung rechnet man mit einer gewissen Sicherheit, weil sich der Polfluß etwas zu klein ergibt.

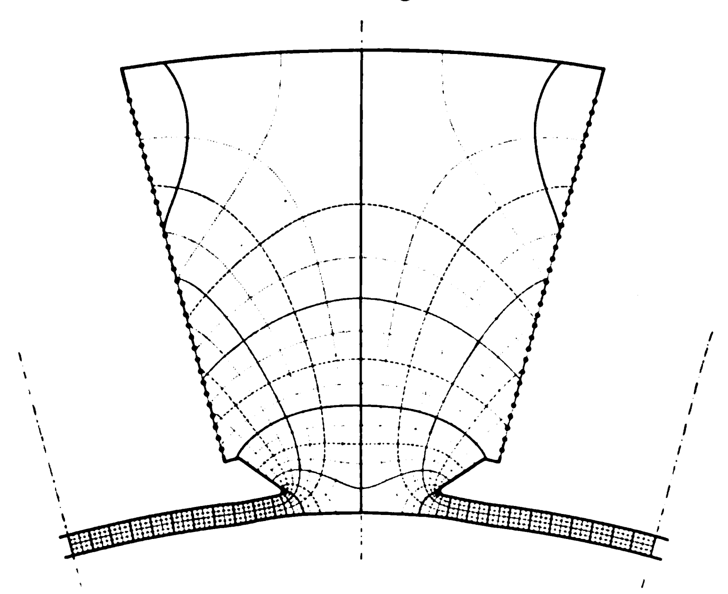


Bild 13. Feldbild bei Leerlauf mit Berücksichtigung der Nutung und der Permeabilität in Zähnen und Polkernen.

5. Das Feld der Ankerdurchflutung.

Bild 14 und 15 stellen die Feldbilder für die im letzten Abschnitt behandelte Gleichstrommaschine dar, wenn bei glattem Anker und unendlich großer Permeabilität im Eisen der Feldmagnet unerregt ist und bei Stellung der unendlich schmal angenommenen Bürsten in der geometrisch neutralen Zone nur der Anker von Strom durchflossen wird. Der Strombelag auf dem Anker ist in den Abbildungen wieder durch Punkte und Kreuze angedeutet, und zwar hier unterhalb der Begrenzungslinie des Ankers, damit das Feldbild im Luftspalt deutlich wird. Die Symmetrielinien des Feldbildes fallen mit den Symmetrielinien der Pole und Pollücken zusammen. Die zwischen Anker und Feldmagnet liegenden Teilröhren sind wie in Bild 9 und 10 durch verschiedene Stricharten unterschieden. Unter dem Polbogen sind die Einheitsröhren in 4, in der Pollücke in 8 Teilröhren, die letzte dieser Teilröhren (in der Nähe des Jochs) ist nochmals in zwei Teile unterteilt.

Beim Aufzeichnen des Bildes ist wieder zu beachten, daß die Niveaulinien die Stromschicht in gleiche Teile teilen. Die Abstände der Niveaulinien auf der Symmetrielinie in der Pollücke sind jedoch nicht bekannt, sie ergeben sich erst durch Aufzeichnen des Feldbildes. Das Bild kann nun entweder von der Pollücke (Bild 14) oder von der Polmitte aus (Bild 15) gezeichnet werden, d. h. man kann die erste Einheitsröhre entweder bei der Symmetrielinie der Pollücke oder der Polmitte beginnen lassen. Im vorliegenden Falle ist die zwischen Polmitte und Pollücke liegende Zahl der Einheitsröhren genau $m = 6^1/_4$, die Röhrenzahl geht hier zufällig in Viertelröhren auf, weshalb der Unterschied der beiden Bilder 14 und 15 äußerlich nur in der Strichart der Feldlinien zum Ausdruck kommt. Würde diese Zahl der Einheitsröhren zwischen Pol und Pollücke einen Bruchteil einer Teilröhre

ergeben, wie es im allgemeinen der Fall sein wird, so würden die Feldlinien in Bild 14 und 15 sich nicht decken, sondern wären etwas gegeneinander verschoben, weil die gebrochene Teilröhre das eine Mal bei der Polmitte, das andere Mal bei der Pollücke liegen würde. Gewöhnlich verdient nur der Teil des Feldbildes Beachtung, der in der Pollücke liegt; auf diesen Teil des Feldbildes hat auch die Eisensättigung keinen merklichen Einfluß.

Zeichnet man das Feldbild wie in Bild 15 von der Polmitte aus, so können die Schnittpunkte der Feldlinien mit der Ankeroberfläche berechnet werden. Wenn wir den Ankerumfang von der Stelle der Polmitte ($x = 0$) aus zählen, so ist bei Vernachlässigung der magnetischen Spannung im Eisen ($\mu = \infty$) die mittlere Induktion längs einer Induktionslinie im Luftspalt, die an der Stelle x des Ankerumfanges austritt

$$B(x) = 4\pi \frac{x\,A}{\delta}, \tag{17a}$$

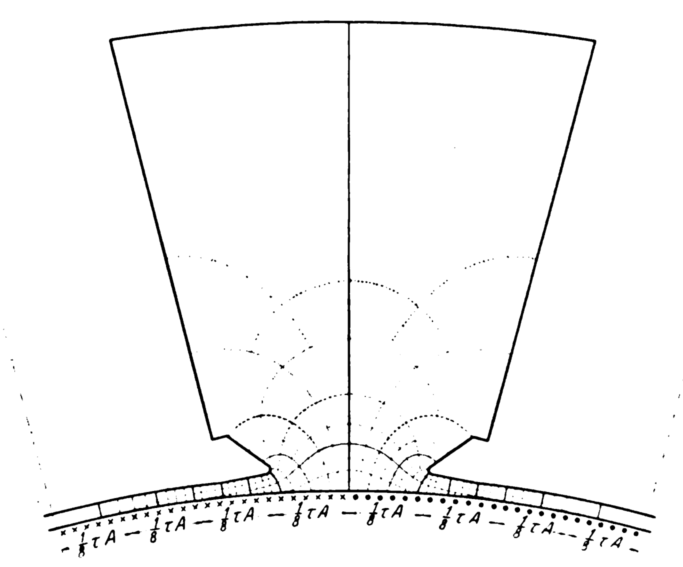


Bild 14. Feldbild bei erregtem Anker und unerregtem Feldmagneten; $\mu = \infty$. Einheitsröhren beginnen Mitte Pollücke.

worin A den Strombelag und δ die von x abhängige Länge der Induktionslinie ist. Dort, wo der Strombelag sein Vorzeichen wechselt, also an der Stelle $x = \frac{\tau}{2}$, wenn wir mit τ die Polteilung bezeichnen, entspringt die Induktionslinie, zwischen deren Enden die volle magnetische Spannung $V = 4\pi \frac{\tau}{2} A$ herrscht. Der Fluß der Einheitsröhre ist also [vgl. Gleichung (5)] für $l = 1$ cm Ankerlänge

$$\varphi = 2\pi\tau A \tag{17b}$$

und der Fluß einer Teilröhre bei n-facher Unterteilung der magnetischen Spannung

$$\frac{\varphi}{n} = 2\pi\tau \frac{A}{n}. \tag{17}$$

Aus den Gleichungen (17a) und (17) lassen sich die Schnittpunkte der Feldlinien mit der Ankeroberfläche berechnen. Für den Teil des Ankerumfangs, wo der Luftspalt

$$\delta = \delta_0 = \text{const.}$$

ist, ergeben sich einfache Gleichungen für jene Schnittpunkte. Bezeichnen wir die Stellen am Ankerumfang, wo die Induktionslinien austreten, mit

$$0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \text{ usw.}$$

und die entsprechenden Werte der Induktion mit

$$0,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4 \text{ usw.},$$

so ist, da nach Gleichung (17a) bei konstantem Luftspalt die Induktion linear ansteigt, der Fluß der ersten Teilröhre

$$\frac{\varphi}{n} = \frac{B_1 x_1}{2} = \frac{2\pi x_1^2 A}{\delta_0}, \qquad (18'a)$$

woraus unter Berücksichtigung von Gleichung (17)

$$x_1 = \sqrt{\frac{\tau \delta_0}{n}} \qquad (18')$$

wird. Für den Punkt x_2 finden wir

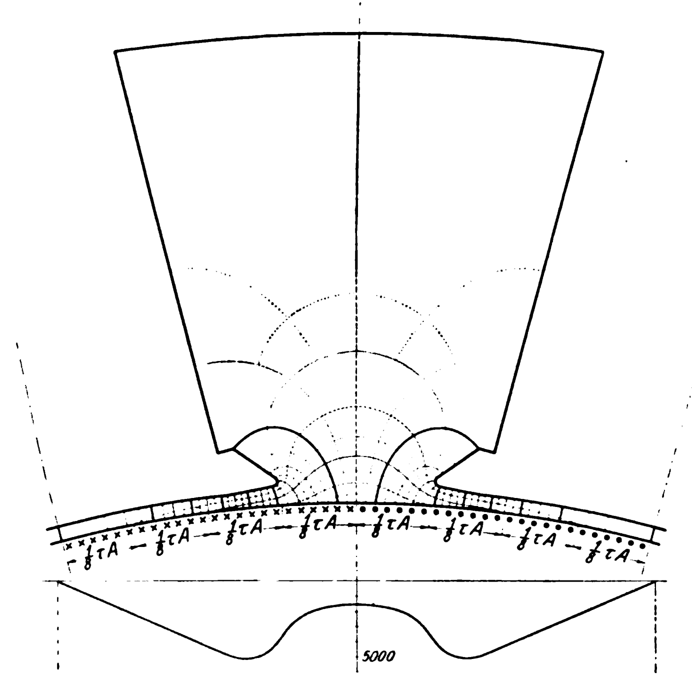


Bild 15. Feldbild bei erregtem Anker und unerregtem Feldmagneten; $\mu = \infty$. Einheitsröhren beginnen bei Polmitte. Unten Normalkomponente am Ankerumfang.

$$2\frac{\varphi}{n} = \frac{B_2 x_2}{2} = \frac{2\pi x_2^2 A}{\delta_0}, \qquad (18''a)$$

$$x_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\tau \delta_0}{n}} \qquad (18'')$$

und für den Punkt x_k

$$x_k = \sqrt{k}\sqrt{\frac{\tau \delta_0}{n}}. \qquad (18)$$

Die Abstände der Feldlinien von der Polmitte verhalten sich unter dem Teil des Polschuhs, wo der Luftspalt konstant ist, wie die Quadratwurzeln der Ordnungszahlen, also wie

$$1 : \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{4} \text{ usw.} \qquad (19)$$

Dieses Verhältnis gilt bei beliebiger Unterteilung n der gesamten magnetischen Spannung; die absoluten Werte können nach Gleichung (18) berechnet werden. In Bild 15 ist in dem Teil unter dem Polschuh $n = 4$. Mit Hilfe der Gleichung (18) wurden in Bild 15 die Abstände der Feldlinien der ersten 14 Teilröhren berechnet.

Die Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang ist bei genügend feiner Unterteilung des Feldbildes umgekehrt proportional den Strecken α (vgl. Bild 16), die die Begrenzungslinien der Teilröhren gleichen magnetischen Flusses am Ankerumfang abschneiden. Der Mittelwert der Normalkomponente über die Strecke α des Ankerumfangs kann nach der Gleichung

$$B_n = B_w \frac{\delta_w}{\alpha} \tag{20a}$$

berechnet werden, die sich aus Gleichung (9a) ergibt, wenn wir den Index 0 durch w ersetzen, um damit zum Ausdruck zu bringen, daß die entsprechenden Größen hier für die Stellen des Ankerumfangs gelten, wo der Strombelag sein Vorzeichen wechselt, d. h. in der Wendezone. Die mittlere Induktion B_w der in der Wendezone endigenden Teilröhre ist nach Gleichung (17)

$$\mathbf{B}_w = \frac{1}{\delta_w}\frac{\varphi}{n} = \frac{2\pi\tau A}{n\,\delta_w}, \tag{20b}$$

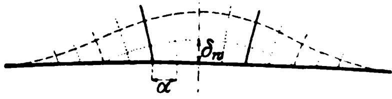


Bild 16. Erläuterungen zu Gleichungen (20a) und b.

wenn n die Unterteilung der magnetischen Spannung $2\pi\tau A$ in der Wendezone angibt (in Bild 15 ist $n = 8$) und δ_w der Abstand der ersten Niveaulinie (im Luftraum) vom Ankerumfang in der Wendezone ist (vgl. Bild 16). Aus Gleichung (20a) und (20b) erhalten wir

$$\mathbf{B}_n = \frac{1}{\alpha}\frac{2\pi\tau A}{n}. \tag{20}$$

In den meisten praktischen Fällen kommt es nur darauf an, die Größe der Normalkomponente der Induktion B_{nw} in der Wendezone zu bestimmen. Diese Komponente nähert sich um so mehr der mittleren Induktion B_w in der Teilröhre zwischen Ankeroberfläche und erster Niveaulinie, je größer die Zahl der Niveaulinien ist, und kann dann nach Gleichung (20b) berechnet werden. Eine zu weitgehende Unterteilung der magnetischen Spannung $2\pi\tau A$ zwischen Ankeroberfläche und Feldmagnet ist jedoch nicht zu empfehlen, weil dann die Größe δ_w (vgl. Bild 16) nicht mehr mit genügender Genauigkeit dem Feldbilde entnommen werden kann. Bei der Bestimmung von δ_w empfiehlt es sich in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Abstände benachbarter Niveaulinien in der Pollücke als Funktion des Potentials der Niveaulinien aufzutragen und die Zeichenfehler graphisch auszugleichen.

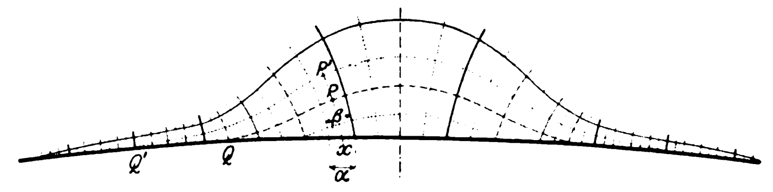


Bild 17. Erläuterungen zu Gleichung (22).

Genauere Werte für die Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang erhält man auf folgende Weise. Wir bilden das Linienintegral der magnetischen Feldstärke über den Weg xPQx in Bild 17 und erhalten, wenn B die mittlere Induktion längs xP ist,

$$B \cdot \overline{xP} = 4\pi A \cdot \overline{Qx}$$

oder

$$B = 4\pi A \frac{\overline{Qx}}{\overline{xP}}. \tag{21}$$

Wir betrachten nun die Teilröhre, deren magnetische Mittellinie xP ist. Sie hat die mittlere Breite β und am Ankerumfang die Breite α. Es ist also der Mittelwert der Normalkomponente der Induktion über die Strecke α

$$B_n = B \frac{\beta}{\alpha}$$

oder mit Gleichung (21)

$$B_n = 4 \pi A \frac{\overline{Qx}}{\overline{xP}} \frac{\beta}{\alpha}. \tag{22}$$

Man könnte bei der Berechnung von B_n das Linienintegral auch über den Weg x P′ Q′x (Bild 17) bilden. Man wählt den Weg des Linienintegrals so, daß einerseits die für die Rechnung nötigen Strecken im Feldbilde gut abgemessen werden können, und daß andrerseits die vorkommenden Mittelwerte der Induktion sich auf nicht zu große Strecken beziehen. Rechnet man nach Gleichung (22) für verschiedene Punkte des Ankerumfangs B_n aus und trägt diese Werte als Funktion des Ankerumfangs auf, so erhält man die Ankerfeldkurve genauer als nach dem zuerst beschriebenen Verfahren Gleichung (20). Der Grund für diese größere Genauigkeit liegt darin, daß sich die Abstände α in Gleichung (20) weniger genau bestimmen lassen als die Strecke xP und das Verhältnis $\frac{\beta}{\alpha}$ in Gleichung (22).

In Bild 15 ist die auf diese Weise erhaltene Ankerfeldkurve für einen Strombelag $A = 348$ A/cm $= 34{,}8$ cgs dargestellt.

6. Das Feld der Wendepole.

Wird die in den Abschnitten 4 und 5 behandelte wendepollose Maschine mit Wendepolen ausgerüstet und soll dabei der Streufluß der Hauptpole unverändert bleiben, so müssen wir den Polschuhbogen um die Breite des Wendepols verschmälern, die Form der Polschuhenden aber beibehalten. Es ergibt sich dann der in den Bildern 18 und 19 dargestellte Querschnitt der Wendepolmaschine.

Wenn die Wendepole allein erregt werden, erhalten wir bei unendlich großer Permeabilität im Eisen und gleichmäßiger Verteilung des Strombelags über den bewickelten Teil der Wendepolflanken das in Bild 18 oben dargestellte Feld des Wendepols und die darunter gezeichnete Verteilung der Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang. Der eingezeichnete Maßstab für die Normalkomponente setzt voraus, daß die Wendepoldurchflutung das 1,25 fache der in Bild 15 angenommenen Ankerdurchflutung beträgt, $\Theta_W = 1{,}25\, \tau A$. Die gestrichelte Kurve mit $^1/_5$ der Ordinatenlänge der ausgezogenen Kurve entspricht dem Überschuß $\Theta_W - \tau A = 0{,}25\, \tau A$ der Wendepoldurchflutung über die Ankerdurchflutung.

In Wirklichkeit wird aber das Feld in der Wendezone von der Resultierenden der Durchflutungen der Wendepole und des Ankers erregt. Um hierfür das Feldbild zu zeichnen, bestimmen wir den Punkt an der Wendepolflanke, bis zu dem von der Wurzel des Wendepols aus gerechnet, die Durchflutung gleich der Ankerdurchflutung eines halben Kreises $\frac{\tau}{2} A$ ist (vgl. Bild 19). Dieser Punkt (—4) am Wendepol hat dann dasselbe Potential wie der ebenso bezeichnete Punkt am Ankerumfang unter Wendepolmitte. Die aus dem Teil 0 bis —4 des Wendepols entspringenden Niveaulinien endigen an entsprechenden Punkten am Ankerumfang, so daß je zwei Niveaulinien gleich große Durchflutungen, aber von entgegengesetztem Vorzeichen am Wendepolkern und am Ankerumfang abgrenzen. Die aus dem Teil —4 bis —5 entspringenden Niveaulinien endigen auf der andern Seite des Wendepols. Setzen wir die magnetische Spannung einer Einheitsröhre gleich der Potentialdifferenz



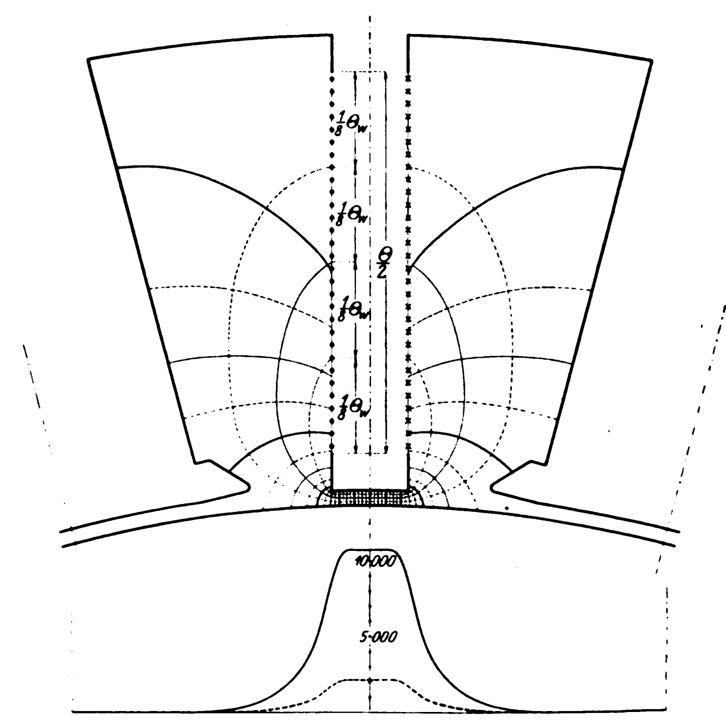


Bild 18. Feldbild der Wendepolwicklung; $\mu = \infty$. Unten Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang; ——— bei voller Durchflutung, ------ bei einer Durchflutung gleich dem Überschuß über die Ankerdurchflutung.

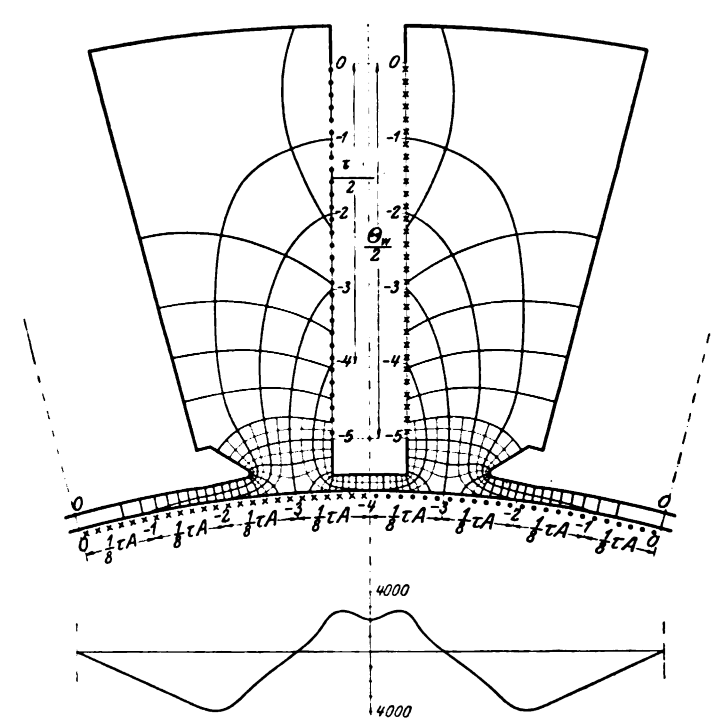


Bild 19. Resultierendes Feldbild der Wendepol- und Ankerwicklung; $\mu = \infty$. Unten Normalkomponente am Ankerumfang.

zwischen Wendepol- und Ankeroberfläche in der Mittelebene durch die Wendepole

$$V_W = 2\pi(\Theta_W - \tau A), \tag{23}$$

so erhalten wir die in Bild 19 durch stärkere Linien abgegrenzten Einheitsröhren, die durch dünnere Linien in je zwei Teilröhren unterteilt sind. Da wir den Strombelag nicht nur am Ankerumfang, sondern auch an den Flanken des Wendepols gleichmäßig verteilt angenommen haben, so sind im Feldbild die Abstände benachbarter Niveaulinien auch an den Wendepolflanken gleich groß.

In Bild 19 ist ebenso wie in Bild 18 angenommen, daß die Wendepoldurchflutung 1,25 mal so groß ist wie die Ankerdurchflutung ($\Theta_W = 1{,}25\,\tau A$). Die Differenz $\Theta_W - \tau A$ von Wendepoldurchflutung und Ankerdurchflutung ist also in der Ankerdurchflutung τA ganz (nämlich viermal) enthalten und wir haben deshalb auch eine ganze Zahl von Einheitsröhren. Wenn das Verhältnis $\frac{\tau A}{\Theta_W - \tau A}$ dagegen gebrochen ist, erhalten wir auch eine gebrochene Zahl von Einheitsröhren. Die magnetische Spannung zwischen der letzten Niveaulinie und dem Joch, dem Hauptpol und der Mittellinie des Hauptpols im Luftspalt beträgt dann einen Bruchteil der magnetischen Spannung $\Theta_W - \tau A$.

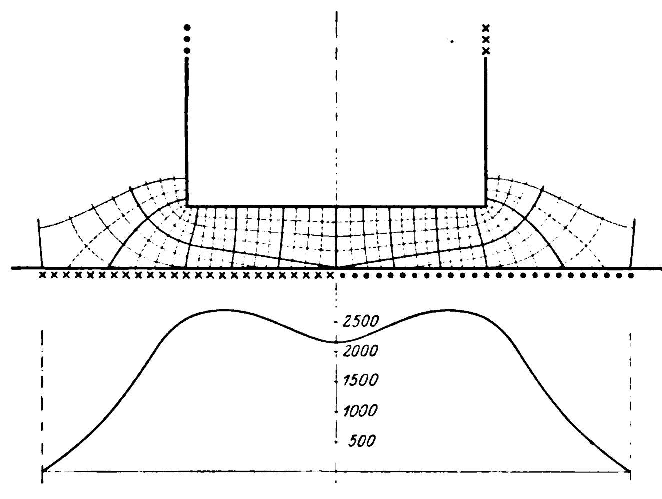


Bild 20. Ein Teil von Bild 19 in größerem Maßstabe.

Besondere Beachtung verdient der Teil unter dem Wendepol, der in Bild 20 in vergrößertem Maßstabe mit vierfacher Unterteilung der Einheitsröhren herausgezeichnet ist.

Die Normalkomponente der Induktion am Ankerumfang bestimmen wir nach Gleichung (20), indem wir $\Theta_w - \tau A$ an Stelle von τA setzen, zu

$$B_n = \frac{1}{\alpha} \frac{2\pi(\Theta_w - \tau A)}{n} \tag{24}$$

(in Bild 19 ist n = 2, in Bild 20 n = 4), oder genauer nach Gleichung (22) (vgl. Bild 17). Wir erhalten die in Bild 19 und 20 unten gezeichneten Feldkurven, die wesentlich von der gestrichelten Kurve in Bild 18 abweichen, welche die Verteilung der Gegendurchflutung des Ankers unberücksichtigt läßt.

7. Das resultierende Feld bei Belastung.

Sucht man zu zwei Feldern, etwa dem Hauptfeld (Bild 9 und 10) und dem Ankerfeld (Bild 14 und 15), das resultierende Feld, so erhält man dieses durch Superposition der Einzelfelder, wenn die Permeabilität im Eisen als konstant angenommen werden darf. Diese Annahme ist für das außerhalb des Polschuhbogens



liegende Gebiet im allgemeinen zulässig. Bei der Superposition ergibt sich das resultierende Feld durch die Diagonallinien der Einzelbilder, wenn diese in demselben

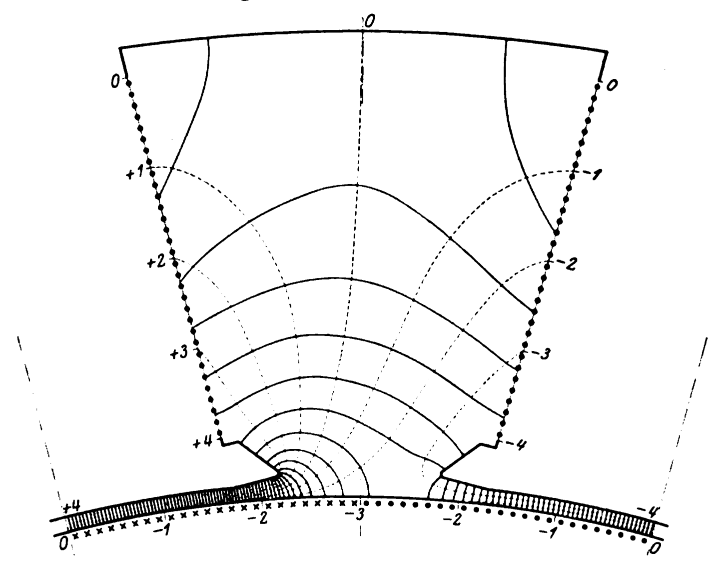


Bild 21. Resultierendes Feldbild einer Maschine ohne Wendepole; $\mu = \infty$.
——— Feldlinien, ------ Niveaulinien.

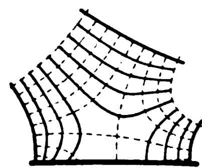


Bild 22. Das Sechseck links von dem rechten Polschuh mit sehr feiner Unterteilung der Feld- und Niveaulinien.

magnetischen Maßstabe gezeichnet sind, d. h. wenn die Röhren gleiche Flüsse führen oder die zugehörigen Niveaulinien gleiche Spannungsunterschiede aufweisen.

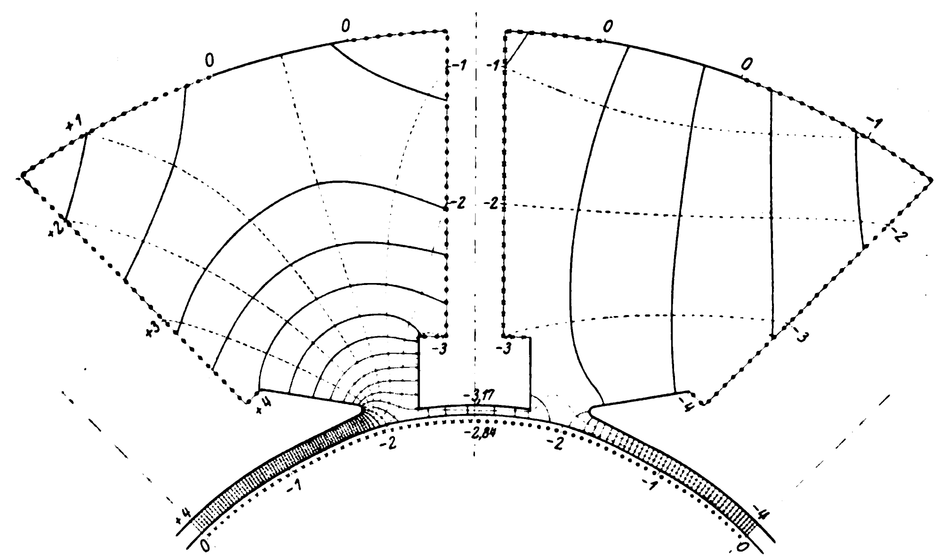


Bild 23. Resultierendes Feldbild einer vierpoligen Gleichstrommaschine mit Wendepolen; $\mu = \infty$.
——— Feldlinien, ------ Niveaulinien.

Die Feldbilder des resultierenden Feldes bei Belastung kann man auch aufzeichnen, ohne die Einzelfelder zu kennen. Hierbei hat man ebenso wie bei Bild 19 vorzugehen, d. h. man hat die Niveaulinien so zu zeichnen, daß sie Punkte gleichen magnetischen Potentials der Begrenzungslinien des Feldbildes miteinander verbinden. Unter der Annahme, daß die Feldmagnetdurchflutung Θ gleich $^4/_3$ der Ankerdurchflutung τA ist, ist in Bild 21 die Verteilung des magnetischen Potentials an den Begrenzungslinien angeschrieben und das resultierende Feldbild bei Belastung der Maschine ohne Wendepole entworfen. Der Anschaulichkeit wegen sind die Feldlinien ausgezogen und die Niveaulinien gestrichelt gezeichnet. Das Sechseck in der Nähe der Polschuhspitze des rechten Pols ist in Bild 22 in vergößertem Maßstabe mit sehr feiner Unterteilung der Feld- und Niveaulinien herausgezeichnet. Dort, wo sich die (gestrichelt gezeichneten) Niveaulinien kreuzen, ist das Feld Null.

Auf ähnliche Weise kann man das resultierende Feldbild der Maschine mit Wendepolen zeichnen. Für eine vierpolige Maschine der Siemens-Schuckertwerke ist in Bild 23 ein solches Feldbild dargestellt, wobei wieder die Feldlinien durch ausgezogene, die Niveaulinien durch gestrichelte Linien gekennzeichnet sind. Die Durchflutung der Hauptpole und Wendepole ist entsprechend der räumlichen Verteilung der Wicklungsquerschnitte teilweise auch auf die Jochränder verlegt. Feldmagnetdurchflutung, Wendepoldurchflutung und Ankerdurchflutung verhalten sich wie $\Theta : \Theta_w : \tau A = 4 : 3{,}17 : 2{,}84$.

8. Einfluß der Stirnflächen und die Berechnung des Streufaktors.

Bisher wurde vorausgesetzt, daß das magnetische Feld in allen Ebenen senkrecht zur Ankerwelle dasselbe sei. In Strenge ist das für eine Maschine mit endlicher Länge nicht richtig, da die Induktionslinien an den Stirnflächen und in deren Nähe nicht mehr in Ebenen senkrecht zur Ankerwelle verlaufen, sondern sich in Richtung der Welle ausbreiten.

Wir berücksichtigen diesen Einfluß der Stirnflächen bei der Berechnung des in den Ankermantel eintretenden Induktionsflusses, indem wir an Stelle der wirklichen Ankerlänge l in den Gleichungen des Abschnitts 2 eine „ideelle Ankerlänge" l_i einführen, wobei gewöhnlich $l_i > l$ ist[1]. Die ideelle Ankerlänge l_i erhält man, ähnlich wie den ideellen Polbogen b_i, aus Feldbildern, die hier aber für solche Ebenen entworfen werden, die durch die Ankerwelle gelegt sind (Längsschnitt der Maschine). Eigentlich setzt dies voraus, daß der Polbogen unendlich breit ist; da es sich hier aber nur um eine Korrektion handelt, kann der Einfluß der Polschuhenden vernachlässigt werden. In Bild 24 ist ein solches Feld mit achtfacher Unterteilung der Einheitsröhren im Längsschnitt einer Maschine mit Lagerschilden aufgezeichnet, wobei der Anschaulichkeit wegen der Luftspalt übertrieben groß angenommen ist. Bezeichnen wir mit m_i die Gesamtzahl der an der Ankeroberfläche endigenden Einheitsröhren, so ist

$$l_i = m_i \delta \qquad (25)$$

(vgl. Gleichung 13b). In Bild 24 ist z. B. $3^7/_8 < \frac{m_i}{2} < 4$, $m_i \sim 7{,}8$. Bei Vernachlässigung der Ausbreitung der Induktionslinien an den Stirnflächen wäre die Zahl der Einheitsröhren $m = \frac{l}{\delta}$, hier also 6,75.

Die ideelle Ankerlänge ist eine Funktion des Abstandes der Ankeroberfläche von der Polschuhoberfläche, und zwar wächst sie mit diesem Abstand. Da dieser nicht über die ganze Polteilung konstant ist, ist auch die ideelle Ankerlänge für die einzelnen Punkte des Ankerumfangs im allgemeinen verschieden. Kennt man nun die Verteilung der Normalkomponente der Induktion bei unendlich langem

[1] Arnold-la Cour, Die Gleichstrommaschine I, 3. Aufl. S. 133.

Anker (Bild 4), so ist der in den Mantel des Ankers von endlicher Länge eintretende Fluß

$$\Phi = \int_0^{\tau} B_n l_i' \, d\, x, \tag{26}$$

worin l_i' die mit der Stelle x des Ankerumfangs veränderliche ideelle Ankerlänge ist und $x = 0$ die neutrale Zone am Ankerumfang bezeichnet. Schreiben wir in Übereinstimmung mit Gleichung (12)

$$\Phi = l_i \, b_i \, B_{n0}, \tag{26a}$$

so ist l_i die mittlere ideelle Ankerlänge, die aus den Gleichungen (26 und 26a) berechnet werden kann. Da nun der Luftspalt gewöhnlich über einen großen Teil des Polbogens konstant ist und B_n an den Stellen, wo er sich erweitert, schnell sinkt, so genügt es im allgemeinen, l_i für die Stelle des Ankerumfangs zu bestimmen, wo

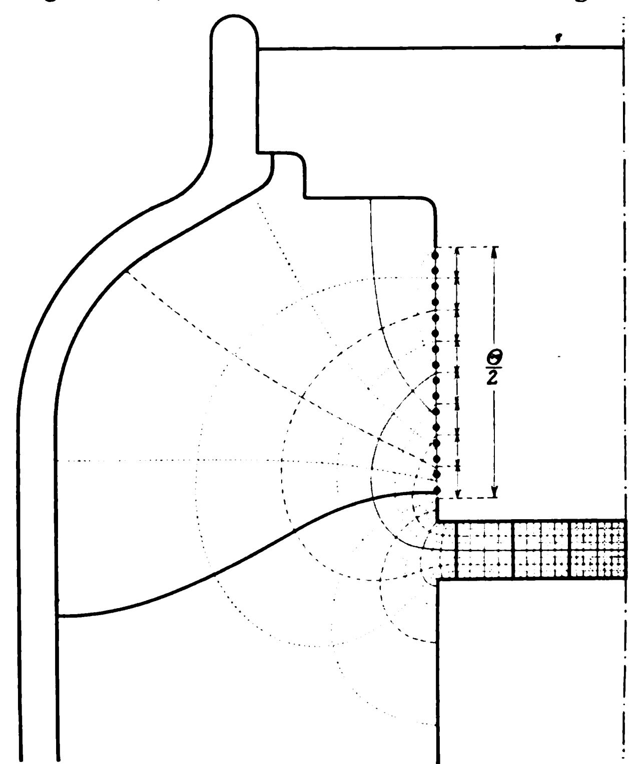


Bild 24. Feldbild bei Leerlauf im Längsschnitt einer Maschine mit Lagerschilden.

der Luftspalt am kleinsten ist und diesen Wert als konstant über den ganzen Ankerumfang anzunehmen. Die Berechnung enthält dann eine gewisse Sicherheit.

Bei der Berücksichtigung des Stirnstreuflusses haben wir die Nähe der etwa vorhandenen Lagerschilde oder Schutzkappen zu beachten.

Liegen diese so nahe am Pol, daß die aus den Stirnflächen austretenden Streulinien im wesentlichen von den Lagerschilden aufgenommen werden, was etwa der Fall sein wird, wenn der Abstand der Lagerschilde von den Stirnflächen der Pole kleiner ist als die halbe Polteilung, so können wir den Streufluß der Stirnflächen aus dem Feldbild im Längsschnitt der Maschine (Bild 24) getrennt bestimmen. Ist m_{St} die Zahl der Einheitsröhren und b_K die Breite des Polkerns, so ist nach Gleichung (6) der Stirnstreufluß

$$\Phi_{St} = m_{St} \, b_K \, V \tag{27a}$$

$\left(\text{in Bild 24 ist } \frac{m_{St}}{2} \sim \frac{6}{8}\right)$. Für den Streufluß der Polflanken schreiben wir

$$\Phi_{Fl} = m_{Fl}\, l\, V, \tag{27b}$$

worin m_{Fl} die Zahl der Einheitsröhren des Streuflusses im Querschnitt der Maschine und l die Länge der Pole in Richtung der Ankerwelle ist. V ist die magnetische Spannung an den Enden der Einheitsröhre [Gleichung (8)].

Der gesamte Streufluß ist dann annähernd

$$\Phi_S = \Phi_{St} + \Phi_{Fl}, \tag{27}$$

und zwar etwas zu klein, da wir die Ausbreitung der Induktionslinien an den Rändern des Pols vernachlässigt haben. Wir könnten auch diesen Einfluß aus einem Feldbilde senkrecht zur Polachse (vgl. Bild 25a bis d) annähernd berücksichtigen, doch soll hierauf nicht weiter eingegangen werden. Der Streufaktor ist annähernd

$$\nu = \frac{\Phi + \Phi_S}{\Phi} = \frac{m\, l_i + m_{Fl}\, l + m_{St}\, b_K}{m\, l_i}, \tag{28}$$

wenn Φ der in den Ankermantel eintretende Fluß, m die Zahl der Einheitsröhren (im Feldbilde des Querschnitts der Maschine) und l_i die ideelle Länge des Ankers ist.

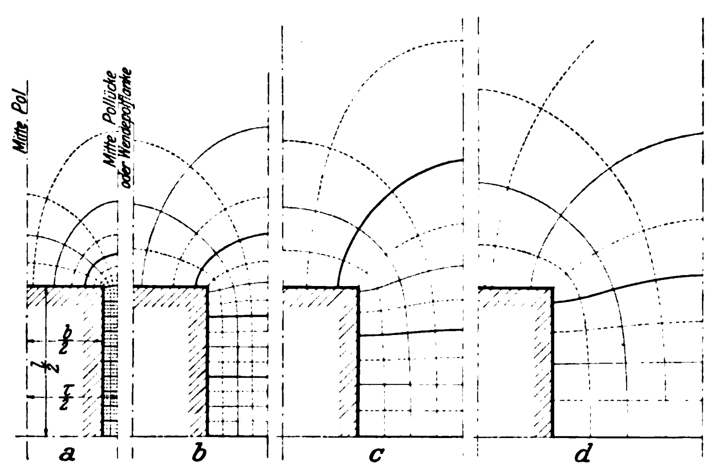


Bild 25. Feldbilder im Schnitt durch die Polachse bei $\frac{\tau}{b}$ = 1,2, 1,8, 2,4 und 3,0.

Wenn der Abstand der Lagerschilde oder Schutzkappen von den Stirnflächen sehr groß ist (mindestens gleich der halben Polteilung), oder jene ganz fehlen, so können wir annehmen, daß die aus der Stirnfläche des Polschuhs austretenden Induktionslinien zum Anker, die übrigen aber entweder zum Joch oder zum andern Pol übertreten. Den Einfluß der Stirnflächen auf den Streufluß können wir dann durch Einführung einer ideellen Länge l_{iK} des Polkerns berücksichtigen.

Für die von Pol zu Joch verlaufenden Streuröhren werden sich die Stirnflächen im wesentlichen ebenso verhalten wie die Polflanken (vgl. die Bilder 10 und 24); deshalb können wir hier die ideelle Länge

$$l_{iK} = \frac{U_K}{2}. \tag{29}$$

setzen, worin U_K der Umfang des Polkernquerschnitts ist.

Für die Streuröhren, die von Pol zu Pol laufen, können wir l_{iK} annähernd bestimmen, indem wir durch die Mitte des Polkerns einen mit dem Ankerumfang konzentrischen Zylindermantel legen, diesen in der Papierebene abrollen und dann ein ebenes Feldbild entwerfen (vgl. Bild 25a bis d). Die auf diese Weise bestimmte ideelle Länge l_{iK} weicht gewöhnlich nicht wesentlich von dem halben Querschnittsumfang ab. Um den Fehler abzuschätzen, den man begeht, wenn auch für die von Pol zu Pol laufenden Stirnstreuröhren die ideelle Länge l_{iK} nach Gleichung (29) eingesetzt wird, wurden in Bild 25a bis d für rechteckige Polquerschnitte

$\left(\text{Seitenverhältnis } \frac{l}{b} = 2\right)$ die ebenen Feldbilder senkrecht zu den parallel angenommenen Polachsen aufgezeichnet und daraus die ideelle Länge l_{iK} berechnet. Vergleichen wir hiermit den halben Umfang $\frac{U_K}{2} = b + l$ des Polquerschnitts, so ist der relative Fehler

$$f = \frac{U_K - 2\, l_{iK}}{2\, l_{iK}}. \tag{30}$$

Dieser ist in Bild 26 für die Seitenverhältnisse $\frac{l}{b} = 2$ und 1 des Polquerschnitts als Funktion von $\frac{\tau}{b}$ aufgetragen. τ ist bei Maschinen ohne Wendepole der Abstand der Mittelebenen benachbarter Pole, bei Maschinen mit Wendepolen der um die Breite des Wendepols verringerte Abstand. Für $\frac{\tau}{b} = 2$ ist der Fehler praktisch Null.

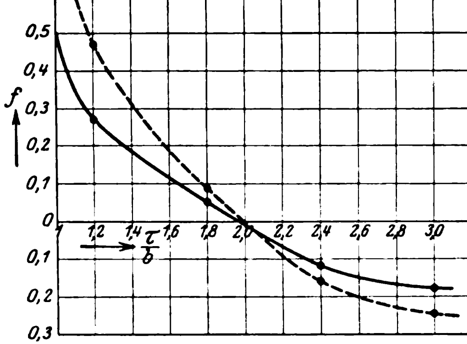


Bild 26. f nach Gleichung (30) als Funktion von $\frac{\tau}{b}$ bei rechteckigen Polkernquerschnitten.
——— $l = 2b$, ------ $l = b$.

Setzen wir sowohl für die von Pol zu Joch als auch für die von Pol zu Pol laufenden Streuröhren die ideelle Läng l_{iK} nach Gleichung (29) ein, so ist der gesamte Streufluß

$$\Phi_S = (m_K\, l_{iK} + m_P\, l)\, V, \tag{31}$$

worin m_K die Zahl der aus dem Kern, m_P die Zahl der aus dem Polschuh im Feldbild des Querschnitts der Maschine austretenden Einheitsröhren und l die Länge des Polschuhs in Richtung der Ankerwelle ist. Der Streukoeffizient wird in diesem Falle

$$\nu = \frac{m\, l_i + m_K\, l_{iK} + m_P\, l}{m\, l_i}. \tag{32}$$

Bei Maschinen mit Wendepolen ist die magnetische Spannung zwischen der Polschuhoberfläche des Wendepols und der dieser gegenüber liegenden Ankerfläche sehr klein im Verhältnis zu der magnetischen Spannung zwischen Wendepol und Hauptpol. Der aus der Stirnfläche der Wendepolschuhe austretende Induktionsfluß ist deshalb im wesentlichen ein Streufluß, so daß wir hier nicht nur für den Polkern, sondern auch für den Polschuh eine ideelle Wendepollänge (in Richtung der Ankerwelle) einführen müssen, die wir für beide gleich groß annehmen und mit l_{iW} bezeichnen. Für den Streufluß der Wendepole schreiben wir dann

$$\Phi_{SW} = m_W\, l_{iW}\, V_W \tag{33}$$

und für den Streufaktor



$$\nu = \frac{m\, l_i + m_W\, l_{iW}}{m\, l_i}. \tag{34}$$

Darin ist m die Zahl der in den Anker, m_W die Zahl der in die Hauptpole und Joche eintretenden Einheitsröhren des Wendepoles, V_W die magnetische Spannung der Einheitsröhre [Gleichung (33)] und l_i die ideelle Ankerlänge. l_{iw} können wir aus einem Feldbild senkrecht zur Wendepolachse bestimmen. Wenn die Länge des Wendepols (in Richtung der Ankerwelle) etwa gleich der Ankerlänge ist, können wir l_{iW} gleich dem halben Querschnittsumfang des Wendepols setzen:

$$l_{iW} = \frac{U_W}{2} \tag{35}$$

Für die einzelnen hier behandelten Fälle sind in der Tafel die Größen der Gleichungen (32) und (34) und der ideelle Polbogen b_i zusammengestellt. Die Ankerlänge einschließlich Lüftungskanäle ist 44,5, die Längen des Polschuhs der Hauptpole und der Wendepole (die keine besonderen Polschuhe haben) sind 43,5 und der Umfang des Querschnitts der Hauptpolkerne (der oval angenommen ist) beträgt 110,8 cm. Bild 10, 11, 18 und 19 setzen einen glatten Anker mit $\delta_0 = 1$ cm voraus. Bild 13 berücksichtigt die Nutung des Ankers und die magnetische Spannung längs der Zähne und der Pole, wodurch wohl der Ankerfluß, der Streufluß aber nicht wesentlich beeinflußt wird. Zum Vergleich sind auch die Streufaktoren

$$\nu' = \frac{m + m_K + m_P}{m} \quad \text{und} \quad \nu' = \frac{m + m_W}{m} \tag{36}$$

eingeschrieben, die sich bei Vernachlässigung des Einflusses der Stirnflächen ($l_i = l_{iK} = l_{iW} = l$) ergeben. Um die in der Tafel angegebenen Größen zu bestimmen, braucht das Feldbild nicht mit besonderer Sorgfalt entworfen zu werden. Feld- und Niveaulinien können zwischen den Polen aus freier Hand nach Augenmaß gezeichnet werden.

Übersichtstafel.

Bild	9	10	13	18	19
m	29,90	29,90	22,88	7,65	8,40
l_i	41,0	41,0	41,0	41,0	41,0
m_K	4,12	2,12	2,12	—	—
l_{iK}	55,4	55,4	55,4	—	—
m_P	0,98	1,22	1,20	—	—
l	43,5	43,5	43,5	—	—
m_W	—	—	—	2,85	16.60
l	—	—	—	48,5	48,5
ν	1,220	1,140	1,180	1,440	3,34
ν'	1,170	1,112	1,145	1,373	2,98
b_i	29,9	29 9	30,9	7,65	8,40



Verlustmessungen an Kondensatoren.

Von

E. Giebe und G. Zickner.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

1. Einleitung.

Die Messung der dielektrischen Verluste in Isolationsmateralien, Kondensatoren und Kabeln ist besonders für die Fernsprechtechnik von großer Bedeutung. Für die Ausführung solcher Messungen sind bei den meist gebräuchlichen Methoden Normalkondensatoren von bekannten oder zu vernachlässigenden Verlusten notwendig. Als Normalkondensatoren werden in der Technik meist Glimmerkondensatoren, bei kleinen Kapazitätsbeträgen Luftkondensatoren, hauptsächlich in der bequemen Form der im Handel erhältlichen Drehkondensatoren benutzt. Es ist seit längerem bekannt, daß bei Glimmerkondensatoren der Verlustwinkel, d. h. derjenige Winkel, um welchen die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung hinter dem theoretischen Wert von 90^0 zurückbleibt, in der Regel sehr klein ist (0,5—5 Minuten), so daß derselbe oft überhaupt nicht in Rechnung gesetzt wird. Über die Verluste von Drehkondensatoren sind bisher nur sehr wenige zahlenmäßige Angaben veröffentlicht, man nahm in Ermangelung solcher Angaben meist an, daß Drehkondensatoren nahezu verlustfrei seien.

Bei den wachsenden Anforderungen an die Genauigkeit von Verlustmessungen in der Technik begnügt man sich jedoch neuerdings nicht mehr damit, die Verlustwinkel der als Vergleichsnormale benutzten Glimmer- und Luftkondensatoren als verschwindend klein anzusehen, sondern wünscht, wie eine größere Anzahl bei der Reichsanstalt gestellter Prüfungsanträge zeigte, genaue zahlenmäßige Angaben über die Größe der Verlustwinkel.

Wir wollen im folgenden beschreiben, wie Verlustmessungen an Kondensatoren in der Reichsanstalt jetzt ausgeführt werden. Dabei soll zugleich an der Hand von Messungen gezeigt werden, daß die Normalluftkondensatoren der Reichsanstalt, die als Vergleichsnormale bei der Ausführung von Prüfungen dienen, innerhalb der erreichbaren, recht hohen Meßgenauigkeit als völlig verlustfrei anzusehen sind.

2. Meßmethode.

An Stelle der bekannten Brückenmethode von M. Wien[1]), die früher meist, auch in der Reichsanstalt, angewendet wurde[2]), ist neuerdings eine von H. Schering[3]) für Verlustmessungen bei Hochspannung angegebene Methode von uns für die Messung sehr kleiner Verlustwinkel bei niedrigen Spannungen ausgearbeitet worden. Bei dieser Methode (Bild 1), die namentlich bei hohen Kapazitätswerten praktische Vorteile gegenüber der Wienschen bietet, wird ebenso wie bei letzterer die Verlustkapazität C_1 mit einer verlustfreien C_2 verglichen, die notwendige Phasenabgleichung der Brückenzweige wird aber nicht wie bei Wiens Methode durch einen regelbaren Vorschaltwiderstand zu C_2, sondern durch eine parallel zum Widerstande r_4 geschaltete regelbare Kapazität c_4 bewirkt.

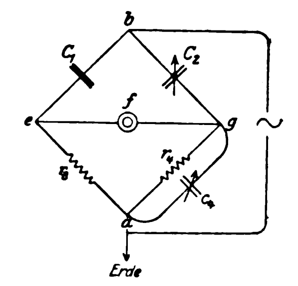


Bild 1. Prinzipielles Schema der Brücke.

[1]) M. Wien, Wied. Ann. **44**, 689, 1891.

[2]) F. W. Grover, Bull. Bur. Stand. **3**, 371, 1907. H. L. Curtis, ebenda **6**, 431, 1910. Sehr genaue Messungen bei K. W. Wagner, **33**, 635, 1912. K. W. Wagner und A. Wertheimer, Phys. Zeitschr. **13**, 368, 1912.

[3]) H. Schering, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **40**, 124, 1920. A. Semm, Arch. f. Elektr. **9**, 30, 1920.

Setzt man voraus, daß die Widerstände r_3 und r_4 kapazitäts- und induktionsfrei, ihre Phasenwinkel also Null sind, so gelten, wenn das Telephon völlig schweigt, die Brücke somit abgeglichen ist, die folgenden leicht abzuleitenden Beziehungen:

$$C_1 : C_2 = r_4 : r_3 \tag{1}$$

$$\delta_1 \approx \operatorname{tg} \delta_1 = \omega c_4 r_4 \tag{2}$$

wo δ_1 der gesuchte Verlustwinkel der Kapazität C_1 und $\omega = 2\pi n$ die Kreisfrequenz des Wechselstromes ist.

Die Phasenwinkel φ_3, φ_4 der Widerstände r_3, r_4 können jedoch praktisch nicht leicht mit einer für die Messung sehr kleiner Verlustwinkel ausreichenden Annäherung zu Null gemacht werden. Die Berücksichtigung der Phasenfehler der Widerstände führt an Stelle von (2) zu der folgenden Nullbedingung:

$$\delta_1 = \omega c_4 r_4 + \varphi_3 - \varphi_4, \tag{3}$$

während die Beziehung (1) unverändert bestehen bleibt. Dabei ist die praktisch in der Regel zutreffende Voraussetzung gemacht, daß die Winkel δ_1, φ_3, φ_4 sämtlich klein sind. Obschon in die Bestimmung von δ_1 nach (3) als Korrektion nur die Differenz $\varphi_3 - \varphi_4$ eingeht, die in gleicharmiger Brücke ($r_3 = r_4$) durch Verwendung genau gleichkonstruierter Widerstände sehr klein gemacht werden kann, ist es doch für Präzisionsmessungen zuverlässiger, diese Korrektion in bekannter Weise durch ein Substitutionsverfahren vollständig zu eliminieren.

In Zweig 1 sei der zu prüfende Kondensator C_x mit dem Verlustwinkel δ_x, in Zweig 2 ein beliebiger regelbarer Kondensator C_2 mit dem Verlustwinkel δ_2 eingeschaltet; ferner sei, weil es sich bei Ausführung der Messungen als zweckmäßig erweist, ebenso wie zu r_4 auch zu r_3 ein regelbarer Kondensator c_3 parallel geschaltet. Die Brücke wird, nachdem für c_3 ein passend gewählter Betrag eingestellt ist, durch Verändern von C_2 und c_4 abgeglichen. Dann ist

$$C_x : C_2 = r_4 : r_3 \tag{4}$$

$$\delta_x - \delta_2 = \omega r_4 c_4 - \omega r_3 c_3 + \varphi_3 - \varphi_4. \tag{5}$$

Nunmehr wird C_x durch einen regelbaren, verlustfreien Normalkondensator C_n ($\delta_n = 0$) ersetzt und die im übrigen unveränderte Brücke durch Regulieren von C_n sowie Verringern von c_4 um den Betrag $\varDelta c_4$ abermals abgeglichen. Jetzt gilt

$$C_n : C_2 = r_4 : r_3 \tag{4a}$$

$$-\delta_2 = \omega r_4 (c_4 - \varDelta c_4) - \omega r_3 c_3 + \varphi_3 - \varphi_4. \tag{5a}$$

Durch Bildung der Differenzen (4) — (4a) und (5) — (5a) folgt:

$$C_x = C_n \tag{6}$$

$$\delta_x = \omega r_4 \varDelta c_4. \tag{7}$$

Durch diese Substitutionsmethode werden natürlich auch alle sonstigen, z. B. von Erdkapazitäten herrührenden, Fehler der Meßanordnung eliminiert, sofern sie nur bei den beiden Abgleichungen der Brücke in gleichem Betrage eingehen.

Hat der Normalkondensator C_n einen von Null verschiedenen, aber bekannten Verlustwinkel δ_n, so ist statt der Gleichung (7) die folgende zu setzen:

$$\delta_x = \omega r_4 \varDelta c_4 + \delta_n. \tag{8}$$

Bei der praktischen Anwendung der Methode ist es, wie wir später sehen werden, oft nicht zu vermeiden, daß im Brückenzweig 1 der Kapazität C_x noch eine weitere Kapazität parallel liegt, die beim Austausch von C_x gegen C_n unverändert bleibt. In manchen Fällen ist die Einschaltung einer solchen Zusatzkapazität durch den besonderen Meßzweck bedingt (vgl. 6), in jedem Fall stellen die unvermeidlichen Zuleitungen zum Kondensator eine Zusatzkapazität dar, die bei sehr kleinen Beträgen der zu messenden Kapazität einen merklichen Bruchteil derselben ausmachen kann. Durch diese Zusatzkapazität c_z, die den Verlustwinkel δ_z habe, wird zwar die Gültigkeit der Gl. (6) nicht beeinträchtigt, wohl aber bedarf Gl. (7) einer Korrektion; denn bei eingeschaltetem C_x bzw. C_n ist der Verlustwinkel der Gesamtkapazität $C_x + c_z$ bzw. $C_n + c_z$ im Zweige (1) jetzt



$$\frac{C_x \delta_x + c_z \delta_z}{C_x + c_z}$$

bzw.

$$\frac{c_z \cdot \delta_z}{C_n + c_z}.$$

Führt man diese beiden Ausdrücke in die Gl. (5) bzw. (5a) ein und beachtet, daß, wie vorher, $C_x = C_n$ ist, so ergibt die Differenzbildung statt der Gl. (7) jetzt

$$\delta_x = \omega\, r_4\, \varDelta c_4 \left(1 + \frac{c_z}{C_n}\right) \tag{9}$$

und in entsprechender Weise statt der Gl. (8) die folgende

$$\delta_x = \omega\, r_4\, \varDelta c_4 \left(1 + \frac{c_z}{C_n}\right) + \delta_n. \tag{10}$$

Bei Vernachlässigung von c_z würde demnach δ_x bzw. $(\delta_x - \delta_n)$ im Verhältnis $(C_n + c_z) : C_n$ zu klein gefunden werden.

3. Meßanordnung.

Um einwandfreie Messungen in der Wechselstrombrücke zu ermöglichen, ist es bekanntlich[1]) notwendig, die Induktivität und Kapazität aller Zweige der Brücke durch bifilare Leitungsführung sowie Abschirmung mittels leitender Hüllen und Erden

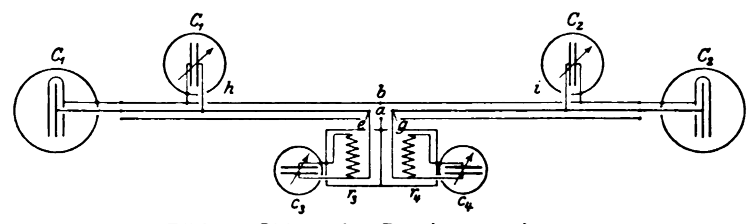


Bild 2. Skizze der Brückenanordnung.

an geeigneter Stelle wohl zu definieren. Mit Rücksicht auf diese Forderung hat die Meßanordnung die in Bild 2 skizzierte Form erhalten. Die Brücke ist völlig symmetrisch aufgebaut, sie wird nur gleicharmig benutzt. Die vier Eckpunkte a, b, e, g (vgl. Bild 1 und 2) liegen nahe beieinander; senkrecht zur Ebene der Zeichnung, der Horizontalebene der Anordnung, nach oben und unten führen verdrillte, durch geerdete Metallrohre abgeschützte Leitungen zum Telephon und zur Wechselstromquelle. Da bei dem in Abschn. 2 beschriebenen Meßverfahren die Widerstände r_3, r_4 für die Abgleichung der Brücke nicht verändert werden, ein Schleifdraht also nicht erforderlich ist, so können diese Widerstände völlig durch einen Metallkasten mit abhebbarem Deckel abgeschützt werden (vgl. Bild 2). Durch Bohrungen in den Seitenwänden des Kastens führen isolierte Drähte zu den abgeschützten Drehkondensatoren c_3 und c_4, deren Hüllen mit der Schutzhülle der Widerstände leitend verbunden sind. Alle diese Hüllen liegen am geerdeten Eckpunkt a der Brücke. Für die Widerstände r_3, r_4 wurden, obschon ihr Phasenwinkel nach Abschn. 2 keine Rolle spielt, die für Wechselstrommessungen wegen ihrer geringen Induktivität und Kapazität besonders geeigneten, aus bifilar ausgespannten Manganindrähten hergestellten Widerstände von Grüneisen und Giebe[2]) benutzt, die sich bei geringem Raumbedarf leicht abschützen lassen. Je nach Größe der zu messenden Kapazitäten waren Beträge von 100 bis 5000 Ohm eingeschaltet.

Zu den Kondensatoren in den Zweigen 1 und 2 der Brücke führen 85 cm lange, abgeschützte Zuleitungen in Form von Messingrohren, in deren Achse je ein 4 mm starker Kupferdraht durch einige Hartgummiisolatoren festgehalten wird. Die Schutz-

[1]) E. Giebe, Ann. d. Phys. **24**, 941, 1907. Zeitschr. f. Instrumentenkunde **31**, 6, 1911.
[2]) E. Grüneisen und E. Giebe, Wissensch. Abh. d. Phys. Techn. Reichsanstalt, **5**, 88, 1921.

rohre, die zugleich zur Stromfortleitung dienen, liegen am Eckpunkt b der Brücke. Als Normalkondensatoren dienten Luftkondensatoren der früher beschriebenen Konstruktion der Reichsanstalt[1]), die mit Hilfe einer einfachen Schaltvorrichtung durch Stecker ohne Benutzung von Drähten beliebig parallel geschaltet werden können, so daß jede gewünschte Kapazität bis zu einem Maximalbetrage von 0,2 μF leicht herstellbar ist. Um diese Normalkondensatoren, die bei hohen Kapazitätsbeträgen ein erhebliches Gewicht haben und ziemlich großen Raum beanspruchen, bequem handhaben zu können, sind sie in zwei Gruppen zu je 0,1 μF geteilt, deren jede auf einem leicht beweglichen Wagen montiert ist. Der Wagen wird an den Beobachtungstisch, auf dem die Brücke aufgebaut ist, herangefahren. Die Rohrzuleitungen zu den Zweigen 1 und 2 der Brücke sind so lang gemacht, daß sie über die Platte des Beobachtungstisches etwas hinausragen und so einen bequemen Anschluß der Kondensatoren an die Brücke ermöglichen. Außer den genannten festen Kondensatoren wurden für die Feinabgleichung der Brücke Drehkondensatoren verschiedenen Meßbereiches benutzt. Diese werden nicht an die Enden der Rohrzuleitungen, sondern näher dem Beobachter bei h und i (Bild 2) an die Zuleitungen angeschlossen. Sämtliche Normalkondensatoren sind völlig abgeschützt. Alle Schutzhüllen werden an den Eckpunkt b der Brücke angeschlossen, ihre recht beträchtliche Erdkapazität beeinflußt die Nulleinstellung nicht, da sie parallel zur ganzen Brücke zwischen den Stromzuführungspunkten liegt. Die Schutzhüllen blieben überdies auch beim Austausch des zu prüfenden Kondensators gegen die Normalkondensatoren am Eckpunkt b der Brücke angeschlossen, so daß das elektrische Feld in der Umgebung der Brücke bei beiden nach Abschn. 2 auszuführenden Abgleichungen das gleiche war.

Für die Prüfung von Kondensatoren, deren Kapazität die der zur Verfügung stehenden Luftkondensatoren (0,2 μF) übersteigt, wurden Glimmerkondensatoren als Normale benutzt. Diese werden in Beträgen von 0,1 μF und 0,2 μF zunächst einzeln mit Hilfe der Luftkondensatoren geeicht und dann miteinander oder mit den Luftkondensatoren parallel geschaltet zu Kapazitäten von 0,3, 0,4 usw. μF, die weiterhin als Normale für die Eichung von Glimmerkondensatoren noch größerer Kapazität dienen. Der Verlustwinkel D mehrerer parallel geschalteter Kondensatoren, deren Kapazitäten c_1, c_2 .... und Verlustwinkel δ_1, δ_2 .... bekannt sind, kann nach der Formel[2])

$$D = \frac{c_1 \delta_1 + c_2 \delta_2 + \ldots\ldots}{c_1 + c_2 + \ldots.} \tag{11}$$

berechnet werden, sofern jeder einzelne Kondensator gut abgeschützt, also von den übrigen nicht beeinflußt ist. Für die einzelnen Abteilungen der bekannten Stöpselkondensatoren trifft dies im allgemeinen nicht zu. In Abschn. 7 wird näheres hierüber mitgeteilt.

Gut abgeschützt müssen auch die Drehkondensatoren c_3 und c_4 sein, da bei der Messung sehr kleiner Verlustwinkel die Kapazitätsdifferenz Δc_4 in Formel (9) unter Umständen nur einen kleinen Betrag hat. Die gewöhnlichen, technischen Drehkondensatoren können, da sie gar nicht oder nur unvollkommen abgeschützt sind, meist nicht ohne weiteres verwandt werden[3]). Obwohl prinzipiell zur Ab-

---

[1]) E. Giebe, Zeitschr. f. Instumentenkunde, **29**, 276, 1909, H. Schering und R. Schmidt, ib. **32**, 253, 1912. Neuere Ausführungsformen für sehr kleine Kapazitäten mit definierter Schaltungskapazität, bei denen beide Belegungen von der Schutzhülle isoliert sind, werden demnächst beschrieben. Sämtliche Typen der Reichsanstalt werden von dem Mechaniker Herrn C. Meyerling, Charlottenburg, Nehringstr. 1, hergestellt.

[2]) Da die Verluste bei gleicher Spannung und Frequenz proportional $c \cdot \delta$ sind, so besagt die Formel, daß der Gesamtverlust gleich der Summe der Verluste der einzelnen parallel geschalteten Kondensatoren ist oder, daß die Gesamtableitung $A = \omega D (c_1 + c_2 + \ldots.) = \omega c_1 \delta_1 + \omega c_2 \delta_2 + \ldots.$, d. h. gleich der Summe der Einzelableitungen ist.

[3]) Geeignet sind z. B. die bekannten handlichen Drehkondensatoren der Firma Dr. Georg Seibt, Berlin-Schöneberg, die bis auf die herausragende Achse des beweglichen Plattensystems und den Ablesezeiger durch ein mit dem festen Plattensystem leitend verbundenes Metallgehäuse

gleichung der Brücke nur parallel zu r_4 ein Drehkondensator c_4 erforderlich ist, schaltet man zweckmäßig auch parallel zu r_3 einen solchen (c_3) ein, um die Anfangskapazität (bei Einstellung 0^0) von c_4 zu kompensieren.

4. Meßgenauigkeit, Meßbeispiel.

Die Meßgenauigkeit hängt bei gegebenem Nullinstrument von der an die Brücke gelegten Spannung, von der Frequenz derselben, von der Größe der Kapazitäten und der Widerstände r_3 und r_4 ab. In dem Frequenzbereich, in dem Vibrationsgalvanometer oder Telephon anwendbar sind, ist es für alle in Betracht kommenden Kapazitätsgrößen meist möglich, die Spannung so hoch zu wählen, daß der Verlustwinkel mit einer praktisch mehr als ausreichenden Genauigkeit bestimmbar wird. Die obere Grenze der zulässigen Spannung ist durch die Belastbarkeit der Normalkondensatoren gegeben, die bei Glimmerkondensatoren etwa 500 Volt, bei Luftkondensatoren häufig noch mehr beträgt. Für die Widerstände r_3, r_4, die in der Regel klein gegenüber den Blindwiderständen der Kapazitäten C_1, C_2 sind, ist in keinem Falle eine zu hohe Strombelastung zu befürchten. Dabei ist eine Schaltung der Brücke wie in Bild 1 vorausgesetzt, nicht etwa die theoretisch gleichwertige, praktisch aber meist ungeeignete Schaltung, bei welcher Nullinstrument und Stromquelle gegeneinander ausgetauscht sind.

Es ist zweckmäßig, r_3 und r_4 so klein, als mit der gewünschten Meßempfindlichkeit verträglich, zu machen, denn bei hohen Beträgen dieser Widerstände würden schon äußerst kleine Kapazitäten c_3, c_4, z. B. Erdkapazitätsänderung des Telephons beim Anlegen an das Ohr, merkliche Phasenverschiebungen in den Zweigen 3 und 4 hervorrufen und somit eine genaue Verlustmessung, die ja durch Regelung von c_4 erfolgt, erschweren oder unmöglich machen. Der Spannungsabfall an r_3 und r_4 muß möglichst klein gegenüber dem an den Kapazitäten C_1, C_2 sein; dann hat das Nullinstrument nur eine geringe Spannung gegen Erde. Durch Erdung in einem Hilfszweig, statt am Eckpunkt a der Brücke kann man nach K. W. Wagner[1]), indem man eine zweite Hilfsabgleichung vornimmt, das Nullinstrument auf Erdpotential bringen und damit etwaige durch Erdkapazität desselben hervorgerufene Störungen völlig beseitigen. Doch zeigen unsere Versuche, daß bei Anwendung eines Substitutionsverfahrens in gleicharmiger, abgeschützter Brücke der Wagnersche Hilfszweig auch bei Messung des Verlustwinkels sehr kleiner Kondensatorkapazitäten[2]) (wobei Widerstandsbeträge r_3 und r_4 bis zu 5000 Ohm benutzt wurden) entbehrt und durch die einfachere direkte Erdung der Brücke ersetzt werden kann. Bei kleinen Kapazitäten (Größenordnung 0,001 μF) ist etwa 1000 Ohm ein geeigneter Betrag für r_3 und r_4, bei größeren Kapazitäten entsprechend weniger. Da innerhalb gewisser Grenzen die Wahl der Größe von r_3 und r_4 freisteht, hat man den Vorteil, diese Widerstände dem Meßbereich eines gegebenen Drehkondensators im Zweige 4 anpassen zu können, so daß die Breite des Tonminimums, d. h. die Differenz der Kondensatoreinstellungen, innerhalb welcher das Telephon völlig schweigt, einen geeigneten Betrag erhält. Auch für die Messung sehr kleiner Verlustwinkel bei hohen Kapazitätsbeträgen C_1, C_2, wo nach Wiens Methode unter Umständen unbequem kleine Serienwiderstände zur Brückenabgleichung erforderlich sind, bietet es keine Schwierigkeiten, r_3 und r_4 so zu wählen, daß man bequem einstellbare Kapazitätsdifferenzen Δc_4 erhält.

---

abgeschützt sind; doch darf die Einstellung nicht unmittelbar mit der Hand durch Anfassen des Drehknopfes besorgt werden, weil dadurch Kapazitätsänderungen eintreten, sondern nur mittels einer isolierenden Handhabe von genügender Länge.

[1]) K. W. Wagner, Elektrot. Zeitschrift **32**, 1001, 1911.

[2]) Bei Verlustmessungen an Kabel-Kapazitäten wird der Wagnersche Hilfszweig meist unentbehrlich sein.

Die Mehrzahl der im folgenden beschriebenen Messungen sind bei der Frequenz $n = 800$ ($\omega = 5000$) mit Telephon ausgeführt, also in dem für die Fernsprechtechnik wichtigen Frequenzbereich, einige Messungen an Glimmerkondensatoren auch bei $n = 50$ unter Benutzung eines Vibrationsgalvanometers nach Schering und Schmidt[1]). Bei $n = 50$ war die Meßgenauigkeit geringer als bei $n = 800$. Den Wechselstrom von 800 Perioden lieferte eine Maschine, deren Spannung durch einen Transformator auf geeignete Höhe gebracht wurde. Durch eine einfache Resonanzschaltung zwischen Maschine und Primärwicklung des Transformators waren Oberschwingungen leicht so weit abzudrosseln, daß stets ein völliges Schweigen des Telephons bei abgeglichener Brücke eintrat.

Als Beispiel sind in der Tabelle 1 die Resultate von Verlustmessungen an zwei Glimmerkondensatoren A und B von Siemens & Halske mitgeteilt, wobei als Vergleichsnormale Luftkondensatoren der Reichsanstalt dienten. Die Kondensatoren sind sowohl jeder für sich, als auch in Parallelschaltung gemessen, und zwar jedesmal bei 4 verschiedenen Widerständen r_3, r_4 (Spalte 2) unter Benutzung von Drehkondensatoren entsprechend verschiedenen Meßbereichs in c_4. Die beobachteten Kapazitätsdifferenzen Δc_4 enthält Spalte 3, die daraus berechneten $\operatorname{tg} \delta$ und δ Spalte 4 und 5. Die Abweichungen (Spalte 6) der vier Einzelmessungen jedes Kondensators von ihrem Mittel überschreiten nur in einem Falle 1''. Berechnet man aus den für A

Tabelle 1

1 Kondensator	2 r_4 Ω	3 ΔC_4 $\mu\mu F$[2])	4 $\operatorname{tg} \delta$	5 δ	6 Abweichungen vom Mittel
			$\times 10^{-4}$		
A 0,100299 μF	100	505,0	2,53	52,1''	−0,4''
	200	252,8	2,53	52,1''	−0,2''
	500	101,5	2,54	52,3''	−0,1''
	1000	51,5	2,57	53,2''	+0,7''
		Mittel:	2,54	52,4''	
B 0,099614 μF	100	737,2	3,69	1' 16,1''	−0,2''
	200	368,0	3,69	1' 16,1''	−0,2''
	500	147,0	3,68	1' 15,8''	−0,5''
	1000	75,0	3,75	1' 17,4''	+1,1''
		Mittel:	3,70	1' 16,3''	
A parallel B 0,199916 μF	100	623,9	3,12	1' 4,2''	−0,2''
	200	310,6	3,11	1' 4,1''	−0,3''
	500	126,0	3,15	1' 5,0''	+0,6''
	1000	62,1	3,10	1' 4,1''	−0,3''
		Mittel:	3,12	1' 4,4''	

[1]) H. Schering und R. Schmidt, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, 38, 1, 1918.
[2]) $1 \mu\mu F = 10^{-12} F = 0{,}9$ cm.



und B gefundenen Mittelwerten δ und aus ihren in Spalte 1 angegebenen Kapazitätswerten den Verlustwinkel für die Kombination A parallel B nach Formel (11), so erhält man in beinahe völliger Übereinstimmung mit dem direkt gemessenen Wert als Resultat $\delta = 1'4{,}_3''$. Bei Kapazitäten von 0,1 μF kann man also Verlustwinkel auf weniger als 1″ genau bestimmen. Die Genauigkeit der Kapazitätsmessung beträgt dabei wenige Milliontel. Praktisch dürfte es freilich zwecklos sein, Glimmerkondensatoren bezüglich Kapazität und Verlustwinkel mit so hoher Genauigkeit zu eichen, ohne zugleich den Temperaturkoeffizienten, den Einfluß des Luftdruckes[1]) zu messen und die zeitliche Unveränderlichkeit solcher Kondensatoren zu prüfen. Hier kam es nur darauf an, an einem Beispiel zu zeigen, welche Meßgenauigkeit erreichbar ist. Daß auch bei 100mal kleineren Kapazitäten die Genauigkeit der Verlustmessungen noch 1″ bis 2″ beträgt, ergibt sich aus Messungen, die in Abschn. 6 mitgeteilt werden.

5. Verlustwinkel für verschiedene Betriebskapazitäten von Kondensatoren.

Bekanntlich hat ein Kondensator im allgemeinen bei verschiedener Schaltungsweise und je nach den äußeren Bedingungen eine andere „Betriebskapazität" und dementsprechend einen anderen Verlustwinkel. Es ist daher zu erörtern, auf welche Weise in der Brücke nach dem beschriebenen Verfahren die verschiedenen Betriebskapazitäten und ihre Verlustwinkel gemessen werden können. Wir gehen von dem Fall eines völlig abgeschützten Kondensators aus, dessen Belegungen 1 und 2 von der Hülle 0 isoliert sind. k_{12} sei die Teilkapazität beider Belegungen gegeneinander, k_{10} bzw. k_{20} die Teilkapazität der Belegung 1 bzw. 2 gegen die Hülle; δ_{12}, δ_{10}, δ_{20} seien die entsprechenden Verlustwinkel.

Schaltet man den Kondensator in die Brücke derart ein (Schaltung I und II), daß die Hülle und die Belegung 1 (oder 2) am Eckpunkt b, die Belegung 2 (oder 1) an e liegt, so wird offenbar die Betriebskapazität $k_{12} + k_{20}$ (oder $k_{12} + k_{10}$) gemessen. Werden beide Belegungen kurzgeschlossen und mit Eckpunkt e verbunden (Schaltung III), während die Hülle an b liegt, so mißt man die Kapazität $k_{10} + k_{20}$. Den verschiedenen Betriebskapazitäten entsprechend werden die folgenden Verlustwinkel gemessen:

$$\frac{k_{12}\,\delta_{12} + k_{20}\,\delta_{20}}{k_{12} + k_{20}}, \qquad \frac{k_{12}\,\delta_{12} + k_{10}\,\delta_{10}}{k_{12} + k_{10}}, \qquad \frac{k_{10}\,\delta_{10} + k_{20}\,\delta_{20}}{k_{10} + k_{20}}.$$

Aus den drei Messungen können die 6 Konstanten des Kondensators, k_{12}, k_{10}, k_{20}, δ_{12}, δ_{10}, δ_{20} einzeln berechnet werden. Man kann aber auch k_{12} und δ_{12} direkt messen (Schaltung IV), wenn man die Hülle mit dem geerdeten Eckpunkt a der Brücke, Belegung 1 mit b, Belegung 2 mit e verbindet; dann liegt die Teilkapazität k_{10} parallel zur ganzen Brücke, ist also auf die Abgleichung derselben ohne Einfluß, während k_{20} dem Widerstand r_3 parallel geschaltet ist. Schaltet man nun aber den Kondensator ab, um dafür den Normalkondensator zu substituieren, so ist zu beachten, daß damit zugleich die zu r_3 parallelliegende Gesamtkapazität um den Betrag k_{20} geändert wird. Der gesuchte Verlustwinkel δ_{12} ist demnach nicht nach Formel (7), sondern nach der folgenden zu berechnen:

$$\delta_{12} = \omega\, r_4\, \Delta c_4 - \omega\, r_3\, k_{20}, \tag{12}$$

wobei k_{20} aus der Differenz der Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{20}$ und k_{12}, also aus zwei Kapazitätsmessungen bestimmbar ist. Kommutiert man in Schaltung IV die Kondensatorbelegungen, so ist in (12) k_{10} an Stelle von k_{20} zu setzen.

Hat der Kondensator keine Schutzhülle, so sind k_{10} und k_{20}, die Teilkapazitäten seiner Belegungen gegen Erde, nicht mehr eindeutig definierte Konstanten des Kondensators, ebensowenig die zugehörigen Verlustwinkel, sondern hängen von seiner Lage zur Erde ab. (Hierüber vgl. Abschn. 8.)

[1]) H. L. Curtis, l. c.

6. Messungen an den Normalluftkondensatoren der Reichsanstalt.

Die Luftkondensatoren der Reichsanstalt, die seit einer Reihe von Jahren als Vergleichsnormale bei der Ausführung von Prüfungen dienen, sind bisher stets als völlig verlustfrei angenommen und als solche auch bei Messungen allerhöchster Genauigkeit, z. B. bei einer Neubestimmung der absoluten, elektrischen Widerstandseinheit[1]), benutzt worden. Da beim Aufbau dieser Normale feste Dielektrika, die wohl die einzige Ursache etwaiger dielektrischer Verluste bilden könnten, nur in sehr geringem, unumgänglich notwendigem Maße verwandt sind, so war es von vornherein, wie einfache Überschlagungsrechnungen lehren, wahrscheinlich, daß bei diesen Normalen die Verluste unmeßbar klein sein würden. Immerhin schien es wünschenswert, durch Messungen den experimentellen Nachweis hierfür zu erbringen. Zur Ausführung solcher Messungen muß man als Vergleichsnormal einen Kondensator benutzen, der nur gasförmiges, also verlustfreies und gar kein festes Dielektrikum enthält. Nun läßt sich ein Luftkondensator praktisch zwar nicht völlig ohne festes Dielektrikum, aber doch so aufbauen, daß die Teilkapazität beider Kondensatorbelegungen gegeneinander (k_{12}, Abschn. 5) eine reine Luftkapazität ist und nur die Teilkapazitäten (k_{10}, k_{20}) der Belegungen gegen die Schutzhülle (o) festes Dielektrikum enthalten. Bild 3 zeigt das Schema eines solchen, etwa aus zwei Platten und einer

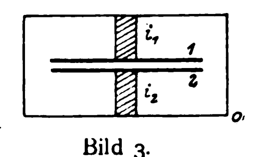


Bild 3.

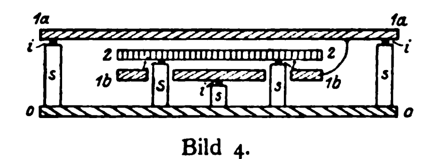


Bild 4.

Schutzhülle zusammengesetzten Kondensators, wobei die festen Isolatoren i_1, i_2 schraffiert eingezeichnet sind. Schaltet man den Kondensator nach der Schaltung IV, Abschn. 5, in die Brücke ein, so kann seine in Zweig 1 der Brücke liegende Teilkapazität k_{12} als völlig verlustfreies Vergleichsnormal benutzt werden. Verluste der Teilkapazitäten k_{10}, k_{20} spielen keine Rolle. Der Verlustwinkel δ_x eines zu untersuchenden Luftkondensators, der mit k_{12} nach dem beschriebenen Substitutionsverfahren verglichen wird, ergibt sich nach der Formel

$$\delta_x \cdot \frac{k_{12}}{k_{12} + c_x} = \omega r_4 \Delta c_4 + \omega r_3 k_{20}, \tag{13}$$

wobei das Glied $\omega r_3 k_{20}$ zu Gleichung (9) aus dem gleichen Grunde wie in Gleichung (12) hinzuzufügen ist.

Auf etwas andere Weise kann man sich mit Hilfe eines geeignet konstruierten, kontinuierlich veränderlichen Luftkondensators, etwa eines Drehkondensators mit festen und beweglichen Plattensystemen eine verlustfreie Vergleichskapazität herstellen. Der Drehkondensator muß völlig abgeschützt sein und die zum Aufbau nötigen, festen Dielektrika müssen so angeordnet sein, daß die Anzahl der sie durchsetzenden elektrischen Kraftlinien beim Drehen des beweglichen Plattensystems, gleichbleibende Potentialdifferenzen vorausgesetzt, nicht geändert wird. Keine der drei Teilkapazitäten k_{12}, k_{10}, k_{20} des Kondensators braucht also eine reine Luftkapazität zu sein, sondern kann eine kleine Verlustkapazität enthalten, nur muß deren Größe von der Stellung des beweglichen Plattensystems zum festen und zur Hülle unabhängig sein. Die Verluste des Kondensators, die dem Produkt $c \cdot \delta$ aus Kapazität und Verlustwinkel für jede Einstellung proportional sind, sind dann unabhängig von der Größe von c, für alle Einstellungen gleich groß ($c \cdot \delta$ = konst.) oder anders ausgedrückt: Der Kondensator verhält sich ebenso wie ein völlig verlust-

[1]) E. Grüneisen und E. Giebe, Wissensch. Abhandl. d. Phys. Techn. Reichsanstalt, 5, 1, 1921.

freier Kondensator gleicher Kapazität mit parallel geschaltetem Widerstand, dessen Betrag unabhängig von der Einstellung ist. Die zwei verschiedenen Kondensatoreinstellungen entsprechende Kapazitäts*differenz* ist demnach völlig verlustfrei[1]). Am einfachsten ist die genannte konstruktive Forderung zu erfüllen, wenn das feste Plattensystem von der Hülle isoliert, das bewegliche mit dieser leitend verbunden ist. Ein solcher Drehkondensator ist als Vergleichsnormal bei Brückenmessungen nach dem beschriebenen Substitutionsverfahren in folgender Weise zu benutzen:

Der zu untersuchende Luftkondensator C_x wird parallel zum Drehkondensator, der auf Minimalkapazität 0^0 eingestellt sei, in Zweig 1 der Brücke eingeschaltet. Die Brücke wird durch Ändern von C_2 und c_4 abgeglichen; dann wird C_x abgeschaltet und die zweite Abgleichung der Brücke erfolgt durch Ändern von c_4 um Δc_4 und Vergrößern der Drehkondensatorkapazität um den verlustfreien Betrag C_n. Dann ist der gesuchte Verlustwinkel δ_x von C_x aus Gleichung (9) zu berechnen, wobei das in dieser Gleichung enthaltene c_z jetzt die Minimalkapazität des Drehkondensators einschließlich etwa vorhandener Zuleitungskapazität bedeutet. Da δ_x im Verhältnis $C_n : (C_n + c_z)$ verkleinert in die Messung eingeht, ist es zweckmäßig, einen Drehkondensator von möglichst geringer Anfangskapazität zu verwenden.

Es erschien nicht überflüssig, zwei reine Luftkondensatoren der beiden oben beschriebenen Arten miteinander zu vergleichen und durch den Versuch zu erweisen, daß in der Tat innerhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit keinerlei Verluste der einen Art relativ zur anderen feststellbar sind. Zur Beurteilung der Meßgenauigkeit teilen wir die Resultate einer Anzahl derartiger Vergleichungen in Tabelle 2 mit. Die dabei benutzten festen Kondensatoren N_a, N_b und N_c wurden aus kreisförmigen Metallplatten zusammengesetzt und hatten die aus Bild 4 im Schnitt ersichtliche Form, die aus praktischen Gründen von dem Schema in Bild 3, Seite 114, etwas abweicht. Statt *einer* Platte 1 im Schema sind zwei leitend miteinander und mit dem Eckpunkt b der Brücke verbundene Platten 1_a und 1_b benutzt, um einerseits die Teilkapazität k_{12} hinreichend groß, andererseits die Teilkapazität k_{20}, die in das Korrektionsglied der Formel (12) eingeht, möglichst klein zu machen. Platte 2 ist mit dem Eckpunkt e der Brücke verbunden. Da die Erdkapazität der Platte 1_a für die Brückeneinstellung belanglos ist, kann die Schutzhülle des Schemas Bild 3 durch eine einzige geerdete Platte 0 ersetzt werden, sofern nur ihr Durchmesser und der von 1_a hinreichend groß gegenüber dem Durchmesser von 2 ist. Jede der drei Platten 1_a, 1_b, 2 ist unter Zwischenfügen sehr kleiner Isolatoren i auf drei Metallstützen s gelagert (in Bild 4 nur teilweise eingezeichnet). Die Stützen für Platte 2 ragen durch Bohrungen der Platte 1_b frei hindurch. Die Plattendurchmesser betrugen 20 cm für 1_b und 2, 30 cm für 0 und 1_a, die Plattenabstände 2 bis 1_a und 2 bis 1_b etwa 1 mm bei den Kondensatoren N_a und N_b, 2—3 mm bei N_c. Die Platte 2 bestand aus Messing, 1_b aus Aluminium, 0 und 1_a beim Kondensator N aus Aluminium, bei N_b aus Messing. Die verschiedenen Kapazitätswerte k_{12}, k_{20} sind in Tabelle 2, Spalte 1, angegeben. k_{20} ergibt sich aus der Differenz der Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{20}$ und k_{12}; $k_{12} + k_{20}$ kann gemessen werden, wenn man die Platte 0 statt an Erde an den Eckpunkt b der Brücke legt. Die benutzten Drehkondensatoren sind Konstruktionen der Reichsanstalt. Kondensator K 627 hat feste Isolatoren aus Quarzglas, K 626 solche aus im Vakuum paraffiniertem Marmor[2]); eines der beiden Plattensysteme ist bei beiden Kondensatoren mit der Schutzhülle verbunden. Bei K 627 enthält nur die Teilkapazität gegen die Hülle festes Dielektrikum, bei K 626 auch die Teilkapazität k_{12}. Im übrigen entspricht ihre Konstruktion der oben aufgestellten Forderung.

[1]) Das gleiche Verfahren wurde kürzlich auch von E. Schott, Jahrb. d. drahtl. Tel., **18**, 94, 1921, bei technischen Drehkondensatoren angewandt. Er fand für die Kapazitätsdifferenzen noch merkliche Verlustwinkel, da bei den von ihm benutzten Kondensatoren die oben angegebene Bedingung offenbar nicht streng erfüllt war. Vgl. auch Abschn. 8 unserer Arbeit.

[2]) Vgl. Tätigkeitsber. d. Phys. Techn. Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenk. **40**, 119, 1920.



Die Messungen (Tabelle 2) sind bei einer Wechselspannung von etwa 250 V und 800 ~ mit verschiedenen Widerstandsbeträgen $r_3 = r_4$ (Spalte 3) ausgeführt, und zwar für Drehkondensator K 627 für drei verschiedene, in Spalte 2 angegebene Einstellungsdifferenzen. Sind die beiden miteinander verglichenen Kondensatoren verlustfrei, so muß sich gemäß Formel (13), unabhängig von der Größe der Widerstände r_3 und r_4,

$$-\Delta c_4 = k_{20} \qquad (14)$$

ergeben. In der Tat zeigt Spalte 4, daß Δc_4 bei allen Widerstandswerten sehr nahe gleich groß und gleich den in Spalte 1 stehenden Werten k_{20} herauskommt, die in der oben angegebenen Weise durch besondere Messungen ermittelt sind. Die Differenzen $\Delta c_4 - k_{20}$ (Spalte 5) sind teils positiv, teils negativ, sie entsprechen den in Spalte 6 angegebenen Winkeln. Die Genauigkeit der Winkelmessung beträgt demnach bei Kapazitäten von 250—1000 $\mu\mu$F etwa 1—2″. Innerhalb dieser Meß-

Tabelle 2.

1 Fester Kondensator	2 Drehkondensator	3 $r_3 = r_4$ Ω	4 $-\Delta c_4$ Skalenteile	4 $-\Delta c_4$ $\mu\mu$F	5 $-\Delta c_4 - k_{20}$ $\mu\mu$F	6 $\omega r_4(-\Delta c_4 - k_{20})$ Sekunden
Na		1000	16,0	5,4	+ 0,4	+ 0,4
k_{12} = 531 $\mu\mu$F	K 627	2000	15,3	5,1	+ 0,2	+ 0,4
k_{20} = 4,9 „	0° bis 45°	3000	13,1	4,5	— 0,4	— 1,4
		4000	13,8	4,5	— 0,4	— 1,8
			Mittel:	4,9		
Nb		1000	13,9	4,7	— 0,2	— 0,2
k_{12} = 546 $\mu\mu$F	K 627	2000	15,3	5,1	— 0,3	— 0,5
k_{20} = 4,8 „	0° bis 46°	3000	14,8	5,1	+ 0,2	+ 0,7
		4000	15,0	4,9	+ 0,1	+ 0,4
			Mittel:	4,9		
Na + Nb		1000	31,1	10,5	+ 0,7	+ 0,7
k_{12} = 1077 $\mu\mu$F	K 627	2000	29,6	10,0	+ 0,2	+ 0,4
k_{20} = 9,8 „	0° bis 88°	3000	29,3	9,7	— 0,1	— 0,3
		4000	31,0	10,2	+ 0,4	+ 1,8
			Mittel:	10,1		
Na + Nb k_{12} = 1079 $\mu\mu$F	K 627	2000	28,7	9,6	— 0,2	— 0,4
k_{20} = 9,8 „	90° bis 177°	3000	29,5	9,8	0	0
			Mittel:	9,7		
Nc		2000	14,2	4,8	— 0,7	— 1,4
k_{12} = 232 $\mu\mu$F	K 626	3000	17,2	5,7	+ 0,3	+ 0,8
k_{20} = 5,5 „	0° bis 154°	4000	15,8	5,3	— 0,2	— 0,7
			Mittel:	5,3		



genauigkeitsgrenze sind Verluste der einen Kondensatorart relativ zur anderen nicht nachweisbar.

Mit Hilfe des Drehkondensators K 627 und eines zweiten gleichgebauten wurde nunmehr eine Anzahl fester Normalkondensatoren der Reichsanstalt von den Sollwerten 1000 und 2000 $\mu\mu$F, die teils Quarzglas[1]), teils Bernsteinisolation hatten, auf Verluste hin untersucht. In allen Fällen konnten innerhalb der angegebenen Meßgenauigkeit von 1—2″ Verluste nicht nachgewiesen werden, übrigens für den Drehkondensator K 627 auch dann nicht, wenn statt der Kapazitätsdifferenzen — wie bei der oben besprochenen Schaltungsweise — die Gesamtkapazität für irgendeine Einstellung untersucht wurde. Normalkondensatoren der Reichsanstalt noch größerer Kapazität brauchten nicht besonders untersucht zu werden, da sie genau so wie die Kondensatoren kleiner Kapazität, insbesondere mit festen Isolatoren gleicher Größe, aufgebaut sind. Selbstverständlich muß die statische Isolation der Kondensatoren, besonders bei kleinen Kapazitäten gut sein; bei feuchter Luft sind die Kondensatoren zu trocknen.

7. Messungen an Glimmerkondensatoren.

Obschon die Größenordnung des Verlustwinkels der im Handel erhältlichen Glimmerkondensatoren bekannt ist, möchten wir doch die Resultate einiger Meßreihen mitteilen, die an den viel benutzten Stöpsel- und Kurbelkondensatoren der Firma Siemens & Halske ausgeführt sind, um auf einige besondere Eigenschaften derselben, auf Vor- und Nachteile der Stöpsel- und der Kurbeltype hinzuweisen und einige Winke zu geben, die vielleicht für eine Verbesserung der Glimmerkondensatoren bezüglich des Verlustwinkels bei der technischen Herstellung von Nutzen sein können.

Die für die Stöpseltype S in Tabelle 3, für die Kurbeltype K in Tabelle 4 enthaltenen Meßresultate können im großen und ganzen als typisch für das Verhalten solcher Kondensatoren angesehen werden. Bei beiden Kondensatoren ist die Schaltungsanordnung so eingerichtet, daß die jeweils nicht benutzten Abteilungen kurzgeschlossen sind.

Was zunächst die Abschützung der Kondensatoren betrifft, so ist diese zwar keine vollständige, da die Kontaktklötze und die Kurbeln freiliegen, doch lehren Messungen, daß bei jeder einzelnen Kondensatorabteilung die eine Belegung (1) die andere (2) völlig umschließt, also abschützt, und daß die Belegungen (1) aller Abteilungen an der gleichen Anschlußklemme liegen[2]). Die Teilkapazität k_{20} der abgeschützten Belegungen ist daher verschwindend klein (unter 1 $\mu\mu$F), während k_{10} etwa 13 $\mu\mu$F beim Stöpsel-, etwa 17 $\mu\mu$F beim Kurbelkondensator beträgt. Schaltet man also einen solchen Kondensator so in die Brücke ein, daß die Belegung (1) am Eckpunkt b der Brücke liegt, und achtet darauf, daß nicht in unmittelbarer Nähe der Kontaktklötze oder der Kurbeln andere Leiter vorhanden sind, so treten nirgends störende Kapazitäten auf, und es kommt die Teilkapazität k_{12} beider Belegungen gegeneinander zur Messung (vgl. Abschn. 5). In dieser Weise ist bei den Messungen der Tabellen 3 und 4 verfahren. Neben den Sollwerten (Spalte 1) enthält Spalte 2 bzw. 2 und 3 die gemessenen Kapazitäten, und zwar ausgedrückt durch ihre relativen Abweichungen vom Sollwert, um deutlich erkennen zu lassen, bis zu welcher Genauigkeit der Sollwert bei der Abgleichung in der Fabrik im allgemeinen erreicht wird. In Spalte 3 von Tabelle 3 und Spalten 4 und 5 von Tabelle 4 sind die bei $n = 800$, für Kondensator K auch bei $n = 50$ gemessenen Verlustwinkel δ in Minuten für die einzelnen Abteilungen angegeben. Es fällt auf, daß bei beiden Kondensatoren der Verlustwinkel mit abnehmender Kapazität stark anwächst, so

[1]) Vgl. Schering und Schmidt im Tätigskeitsber. d. Phys. Techn. Reichsanstalt, Zeitschr. f. Instrumentenkunde, **33**, 117, 1913.

[2]) Bei der Stöpseltype ist diese Klemme ohne weiteres kenntlich, bei der Kurbeltype nicht; hier wäre eine Bezeichnung erwünscht.

Tabelle 3.

Zwölfstufiger Stöpsel-Kondensator S der Firma Siemens & Halske

$t = 20^0$ C $n = 800 \sim$ $c_s = 30\ \mu\mu F$ $\delta_s = 1_5'$

Kapazität		Verlustwinkel	
Sollwert	Abweichung vom Sollwert	δ der Gesamtkapazität C	δ' der Kapazitätsdifferenz $C' = C - c_s$
μF	‰	Minuten	Minuten
0,001	+ 3,0	$2,7_5$	$2,3_5$
0,002	+ 20,5	1,5	1,3
0,002·	+ 20,5	$1,2_5$	$0,1_5$
0,005	+ 22,6	$0,8_5$	0,8
0,01	+ 6 0	0,6	$0,5_5$
0,01·	+ 13,2	$0,4_5$	$0,4_5$
0,02	+ 13,8	0,3	0,3
0,05	+ 13,5	$0,1_5$	$0,1_5$
0,1	+ 10,0	$0,2_5$	$0,2_5$
0,1·	+ 14,7	0,2	0,2
0,2	+ 13,1	0,2	0,2
0,5	+ 14,1	0,3	0,3
Spalte 1	2	3	4

daß derselbe bei den kleinsten Kapazitätswerten von anderer Größenordnung als bei den größten ist. Diese Unterschiede sind bei $n = 50$ noch beträchtlicher als bei $n = 800$. Da der Verlustwinkel eines homogenen Dielektrikums für eine bestimmte Frequenz eine Materialkonstante desselben ist, sollte er unabhängig von der Größe der Kapazität immer gleich groß herauskommen oder doch nur wenig verschieden, insofern das für die einzelnen Abteilungen benutzte Glimmermaterial etwas verschiedene Beschaffenheit haben mag. Da die Messungen keinen von der Kapazität unabhängigen Winkel ergeben, liegt die Vermutung nahe, daß die beobachteten Verluste nicht allein im Glimmer, sondern auch noch in anderen bei der Konstruktion der Kondensatoren benutzten festen Isolatoren von schlechten dielektrischen Eigenschaften ihre Ursache haben, z. B. in dem die Kontaktklötze isolierenden Hartgummi. Eine solche schädliche Zusatzkapazität, die nicht Glimmer als Dielektrikum enthält, ist die „Schaltungskapazität" c_s des Kondensators, d. i. diejenige Kapazität, die bei Ausschaltung und Kurzschluß sämtlicher Abteilungen zwischen den Kondensatorklemmen liegt. Die Messungen ergaben für diese Schaltungskapazität, und zwar für die Teilkapazität k_{12} der Schaltung, die recht hohen Beträge von 30 bzw. 63 $\mu\mu F$ für Kondensator S bzw. K und die überaus großen Verlustwinkel δ_s von 15' für S, sowie $1^0 20'$ bei $n = 800$ und $3^0 40'$ bei $n = 50$ für Kondensator K. Schaltet man also eine Abteilung der Kondensatoren ein, so kommt zu deren „Glimmer"-Kapazität C' die Schaltungskapazität c_s additiv hinzu, und es ist klar, daß der Verlustwinkel der zwischen den Klemmen liegenden Gesamtkapazität $C = C' + c_s$ um so größer sein muß, je kleiner die Kapazität C' der eingeschalteten Abteilung ist. Daß c_s und δ_s konstant, d. h. unabhängig davon ist, ob die eine oder die andere Abteilung oder mehrere Abteilungen eingeschaltet sind, wurde durch Messungen festgestellt. Die direkte Messung der Kapazitätsdifferenz $C' = C - c_s$ und ihres Verlustwinkels δ' kann in einfacher Weise nach dem beschriebenen Substitutionsverfahren erfolgen, indem man bei der Substitution des Normalluftkondensators den Glimmerkondensator nicht ganz abschaltet, sondern nur alle Abteilungen ausschaltet und die somit in dem betreffenden Brückenzweige liegenbleibende Schaltungskapazität c_s der Zuleitungskapazität des Zweiges hinzurechnet. Die auf diese Weise ermittelten Verlust-



Tabelle 4.

Dreidekaden-Kurbelkondensator K der Firma Siemens & Halske

$t = 20^0$ C $\quad \left.\begin{matrix} c_s = 63\ \mu\mu F \\ \delta_s = 8_0' \end{matrix}\right\} n = 800\sim \quad \left.\begin{matrix} c_s = 68\ \mu\mu F \\ \delta_s \text{ etwa } 220' \end{matrix}\right\} n = 50\sim$

Kapazität			Verlustwinkel			
Sollwert	Abweichung vom Sollwert		δ der Gesamtkapazität C		δ' der Kapazitätsdifferenz $C' = C - c_s$	
	n 800	n 50	n 800	n 50	n 800	n 50
μF	°/oo	°/oo	Minuten	Minuten	Minuten	Minuten
0,001	− 87	− 82	$6{,}3_5$	14	$0{,}8_5$	3
0,002	− 59	− 55	6,3	15	$3{,}7_5$	7
0,003	− 55	− 51	$5{,}6_5$	13	$3{,}9_5$	8
0,004	− 50	− 48	$4{,}9_5$	15	$3{,}6_5$	11
0,005	− 41	− 38	4,6	10,5	3,6	7,5
0,006	− 38	− 35	$4{,}3_5$	9,5	$3{,}5_5$	7
0,007	− 40	− 35	$4{,}1_5$	9	$3{,}4_5$	7
0,008	− 36	− 34	$3{,}9_5$	9	$3{,}3_5$	7
0,009	− 36	− 34	4,0	9	$3{,}4_5$	7
0,01	− 10,1	− 8,8	1,3	2,5	0,8	1,5
0,02	− 4,6	− 3,9	$0{,}8_5$	2	0,6	1,5
0,03	+ 0,4	+ 1,2	1,1	2	$0{,}9_5$	1,5
0,04	+ 1,7	+ 2,4	1,0	2	0,9	1,5
0,05	+ 0,5	+ 1,3	0,9	1,7	0,8	1,4
0,06	+ 2,1	+ 2,7	0,8	1,6	0,7	1,4
0,07	+ 3,2	+ 3,6	$0{,}7_5$	1,5	0,7	1,3
0,08	+ 3,4	+ 3,9	0,7	1,4	$0{,}6_5$	1,2
0,09	+ 3,2	+ 3,7	$0{,}7_5$	1,5	$0{,}6_5$	1,4
0,1	+ 2,9	+ 3,5	0,9	1,3	$0{,}8_5$	1,2
0,2	− 0,6	− 0,1	$0{,}8_5$	1,4	$0{,}8_5$	1,8
0,3	+ 0,1	+ 0,8	$0{,}8_5$	1,0	$0{,}8_5$	0,9
0,4	0	+ 0,7	0,9	0,9	0,9	0,9
0,5	+ 0,3	+ 1,0	0,5	0,6	$0{,}5_5$	0,6
0,6	− 0,2	+ 0,4	$0{,}2_5$	0,4	$0{,}2_5$	0,4
0,7	− 0,3	+ 0,4	$0{,}3_5$	0,4	$0{,}3_5$	0,4
0,8	− 0,5	+ 0,1	0,4	0,3	0,4	0,3
0,9	− 0,9	− 0,3	0,3	0,3	0,3	0,3
Spalte 1	2	3	4	5	6	7

winkel δ' sind in Spalte 4 von Tabelle 3 sowie Spalte 6 und 7 von Tabelle 4 angegeben. Zwischen den drei Winkeln δ, δ' δ_s besteht gemäß Formel (11) die auch experimentell bestätigte Beziehung $C \cdot \delta = C' \delta' + c_s \delta_s$. Die Winkel δ' sind bei allen Abteilungen mit Ausnahme der höchsten Kapazitätswerte kleiner als die Winkel δ. Besonders deutlich tritt der schädliche Einfluß der Schaltungskapazität des Kurbelkondensators bei $n = 50$ hervor, und zwar am augenfälligsten bei der kleinsten Abteilung 0,001 μF, wo der Winkel δ' etwa 8 mal kleiner ist als δ.

Aber auch nach Abzug der Schaltungskapazität sind die Verlustwinkel bei kleinen Kapazitäten noch wesentlich größer als bei großen. Die Schaltungskapazität c_s ist offenbar nicht die einzige der vorhandenen schädlichen Zusatzkapazitäten, die Kapazität der von den Belegungen der einzelnen Abteilungen zu den Kontaktklötzen führenden Zuleitungen, ein Teil der Kontaktklotz-Kapazitäten (der in c_s nicht mit enthalten ist) können ebenfalls zur Vergrößerung der Verluste in einem mit abnehmender Glimmerkapazität steigendem Maße beitragen. Zu ganz ähnlichen

Ergebnissen führten Messungen an verschiedenen anderen Kurbel- und Stöpselkondensatoren.

Was den Einfluß der Frequenz auf den Verlustwinkel betrifft, so unterscheiden sich bei den größten Kapazitätsbeträgen, wo schädliche Zusatzkapazitäten keine Rolle mehr spielen, die bei $n = 50$ und $n = 800$ gemessenen Winkelwerte des Glimmers nur sehr wenig voneinander. Meßresultate, die an anderen Glimmerkondensatoren gewonnen wurden, machen es ebenfalls wahrscheinlich, daß der Verlustwinkel des Glimmers sich nur wenig mit der Frequenz ändert. Die bei den kleinen Kapazitätsbeträgen beobachtete Frequenzabhängigkeit dürfte zum großen Teil auf Zusatzkapazitäten der genannten Art zurückzuführen sein.

Die Kapazitätswerte hängen nur sehr wenig von der Frequenz ab, wie Spalte 2 und 3 in Tabelle 4 zeigt. Die Differenzen der bei $n = 50$ und $n = 800$ gemessenen Werte sind zum Teil auf die Frequenzabhängigkeit der Schaltungskapazität zurückzuführen.

Man kann also zusammenfassend sagen, daß die dielektrischen Verluste bei den kleinsten Abteilungen von Glimmerkondensatoren der genannten Art der Hauptsache nach nicht durch den Glimmer, sondern durch andere feste Isolatoren bedingt sind. Die Stöpseltype verhält sich infolge ihrer geringeren Schaltungskapazität dielektrisch günstiger als die Kurbeltype. Die große Anzahl (27) einzelner Abteilungen bei letzterer gegenüber 12 bei der Stöpseltype erfordert wohl längere Zuleitungen von den Belegungen zu den Kurbelkontakten und engeren Zusammenbau der einzelnen Kontakte, wodurch zusätzliche Verluste entstehen. Durch Beachtung der hier gewonnenen Resultate bei der Herstellung der Kondensatoren dürften sich die dielektrischen Eigenschaften derselben verbessern lassen.

Für die Benutzung von Stöpselkondensatoren ist es recht unbequem, daß, wie bekannt, bei gleichzeitiger Einschaltung mehrerer Abteilungen der zugehörige Kapazitätswert nicht genau als die Kapazitätssumme der einzeln gemessenen Abteilungen berechnet werden kann. Der berechnete Wert ist stets größer als der direkt gemessene. Auch für den resultierenden Verlustwinkel mehrerer parallel geschalteter Abteilungen ergibt die Berechnung aus den einzeln gemessenen Winkeln nach Formel (11) immer etwas größere Werte als die Messung. Bei Kurbelkondensatoren tritt die gleiche Unstimmigkeit in viel geringerem Maße, nämlich nur bei gleichzeitiger Einschaltung von Abteilungen aus 2 oder 3 Dekaden auf. Um welche Differenzen es sich dabei handelt, ist aus Tabelle 5 und 6 ersichtlich, in welchen (Spalte 1) für eine Anzahl von Kombinationen verschiedener Abteilungen die gemessenen (Spalte 2) und die berechneten (Spalte 3) Kapazitäten (Gesamtkapazitäten im gleichen Sinne wie in Tabelle 3 und 4) sowie die Differenzen beider Werte (Spalte 4 und 5) eingetragen sind; die Spalten 10 und 12 enthalten die entsprechenden Werte für die Verlustwinkel.

Die Ursache der beobachteten Differenzen ist zum größten Teil in der oben definierten Schaltungkapazität c_s zu suchen. Legt man nämlich der Berechnung der Kapazität und des Verlustwinkels von Kombinationen nicht die Werte C und δ der Gesamtkapazität, sondern die Werte des C', δ' der Kapazitätsdifferenz $C - c_s$ zugrunde, so kommen Rechnung und Messung, wie die Spalten 6—9 bzw. 13—15 zeigen, in recht gute Übereinstimmung, die für die meisten Meßzwecke praktisch völlig ausreichend ist. Die noch übrig bleibenden kleinen Differenzen haben allerdings durchweg das gleiche Vorzeichen, sind also nicht auf Meßfehler zurückzuführen. Die Rechnung ergibt immer größere Werte als die Messung; dies deutet auf eine geringe gegenseitige Beeinflussung der einzelnen Abteilungen, vielleicht in ihren Zuleitungen, hin. Bei älteren Typen von Stöpselkondensatoren, ohne Kurzschlußvorrichtung für jede Abteilung, ist anscheinend eine solche gegenseitige Beeinflussung zweier Abteilungen nicht immer so gut vermieden wie bei den neueren, denn bei jenen ist auch unter Berucksichtigung der Schaltungskapazität die Berechnung von Kombinationen bisweilen ungenauer als bei den Beispielen in Tabelle 5.



Tabelle 5.
Kombinationsmessungen am Stöpselkondensator S.
t = 20° C. n = 800 ~. c_s = 30 μμF. $\delta_s = 1_5'$.

Kombination	Gesamtkapazität C				Kapazitätsdifferenz C' = C — c_s				Verlustwinkel in Minuten					
									δ der Gesamtkapazität C			δ' der Kapazitätsdifferenz C'		
	gemessen	berechnet	Differenz		gemessen	berechnet	Differenz							
	μF	μF	μμF	‰	μF	μF	μμF	‰	gem.	ber.	Diff.	gem.	ber.	Diff.
0,001 + 0,002	0,003011	0,003044	33	10,9	0.002981	0,002984	3	1,0	1,7$_5$	1,9	0,1$_5$	1,6$_5$	1,6$_5$	0
0,001 + 0,002·	0 003013	0,003043	30	10,0	0,002984	0,002984	0	0	1,5$_5$	1,7$_5$	0,2	1,5	1,5	0
0,002 + 0,002·	0,004049	0,004082	33	8,1	0,004019	0,004023	4	1,0	1,3	1,4	0,1	1,1$_5$	1,2	0,0$_5$
0,001 + 0,005	0,006084	0,006115	31	5,1	0,006055	0,006056	1	0,2	1,0$_5$	1,2	0,1$_5$	0,9$_5$	1,0$_5$	0,1
0,002 + 0,005	0,007124	0,007154	30	4,2	0,007094	0,007095	1	0,1	1,0	1,0$_5$	0,0$_5$	0,9$_5$	0,9$_5$	0
0,001 + 0,002 + 0,005	0,008092	0.008157	64	7 9	0,008063	0,008067	5	0,6	1,1	1,2$_5$	0,1$_5$	1,0$_5$	1,1	0,0$_5$
0,002 + 0,002· + 0,005	0,009128	0,009195	67	7.3	0,009099	0,009106	7	0,8	0.9	1,1	0,2	0,8	0,9$_5$	0,1$_5$
0,005 + 0,01	0.015142	0,015173	31	2,0	0,015112	0,015114	2	0,1	0,6$_5$	0,7	0,0$_5$	0 6$_5$	0,6$_5$	0
0,001 + 0,002 + 0,005+0,01	0,018122	0,018217	95	5,3	0,018092	0,018099	6	0,3	0,8	0,9	0,1	0,7$_5$	0,8	0,0$_5$
0,01 + 0,01·	0,020151	0,020192	41	2,0	0,020121	0 020133	12	0,6	0,5	0,5$_5$	0,0$_5$	0,4$_5$	0,5	0,0$_5$
0,01 + 0,1	0,111025	0,111059	34	0,3	0,110995	0,111000	5	0	0,3	0,3	0	0,3	0,3	0
0,1 + 0,1·	0,202390	0,202466	76	0,4	0,202360	0,202406	46	0,2	0.2	0,2$_5$	0,0$_5$	0,2	0,2	0
0,1 + 0,2	0 303580	0,303621	41	0,1	0,303550	0,303561	11	0	0.2$_5$	0,2$_5$	0	0,2$_5$	0,2$_5$	0
Spalte 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Tabelle 6.
Kombinationsmessungen am Kurbelkondensator K.
t = 20° C. n = 800 ~ c_s = 63 μμF. $\delta_s = 8_0'$.

Kombination	Gesamtkapazität C				Kapazitätsdifferenz C' = C — c_s				Verlustwinkel in Minuten					
									δ der Gesamtkapazität C			δ' der Kapazitätsdifferenz C'		
	gemessen	berechnet	Differenz		gemessen	berechnet	Differenz							
	μF	μF	μμF	‰	μF	μF	μμF	‰	gem.	ber.	Diff.	gem.	ber.	Diff.
0,001 + 0,01	0,010751	0,010815	64	6,0	0,010687	0,010690	3	0,3	1,3	1,7	0,4$_5$	0,8	0,8	0
0,009 + 0,01	0,018508	0,018575	67	3,6	0,018444	0,018449	5	0,3	2,2$_5$	2,5$_5$	0,3	1,9$_5$	2,0$_5$	0,1
0,001 + 0,01 + 0,1	0,110970	0,111106	136	1,2	0,110907	0,110907	0	0	0,8$_5$	1,0	0,1$_5$	0,8	0,8$_5$	0,0$_5$
0,009 + 0,09 + 0,1	0,199087	0,199254	167	0,8	0,199025	0,199063	38	0,2	0,9	0,9$_5$	0,0$_5$	0,8$_5$	0,8$_5$	0
Spalte 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Mit Rücksicht auf die mitgeteilten Erfahrungen werden in den Prüfungsscheinen der Reichsanstalt für Stöpsel- und Kurbelkondensatoren in der Regel die Werte von Kapazität und Verlustwinkel jeder einzelnen Abteilung nicht für die zwischen den Klemmen liegende Gesamtkapazität, sondern für die Differenz zwischen dieser und der Schaltungskapazität sowie die Größe der letzteren und ihres Verlustwinkels angegeben. Bei Benutzung solcher Kondensatoren für Brückenmessungen empfiehlt sich die oben angegebene Schaltungsweise, bei der die Schaltungskapazität nicht in die Messungen eingeht

8. Messungen an technischen Drehkondensatoren.

Daß die meisten der gebräuchlichen Drehkondensatoren nicht verlustfrei sind, ist bei der oft reichlichen Verwendung fester Dielektrika zu ihrem Aufbau von vornherein zu erwarten und wohl jedem, der genauere Verlustmessungen ausgeführt hat, bekannt. Da diese ursprünglich wohl nur zur Verwendung in den elektrischen Schwingungskreisen der Hochfrequenztechnik gebauten Kondensatoren vielfach auch bei Brückenmessungen als Normalkondensatoren benutzt werden und da zahlenmäßige Angaben über die Größe ihres Verlustwinkels in der Literatur kaum zu finden sind[1]), so sollen im folgenden die Meßergebnisse für einige marktgängige Drehkondensatortypen mitgeteilt und zugleich gezeigt werden, wie diese Kondensatoren bei Brückenmessungen zweckmäßig zu schalten sind, so daß ihre zum Teil nicht unbeträchtlichen Verluste nicht in vollem Betrag in die Messung eingehen.

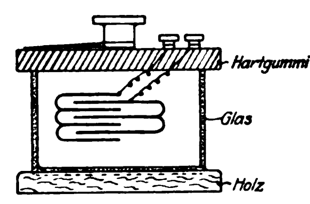


Bild 5. Schema eines technischen Drehkondensators.

Viele Drehkondensatoren, z. B. der Firmen Huth, Siemens & Halske, Telefunken u. a., sind nach dem Schema Bild 5 aufgebaut: Die Achse des beweglichen Plattensystems (2) ist in einer Hartgummiplatte gelagert, an welcher auch das unbewegliche Plattensystem (1) befestigt ist; ein Glasgefäß auf hölzerner Grundplatte soll Ölfüllung ermöglichen. Die beiden Plattensysteme eines solchen Kondensators haben 3 Teilkapazitäten k_{12} bzw. k_{10}, k_{20} (vgl. Abschn. 5) gegeneinander bzw. gegen Erde, sofern sich nicht noch ungeerdete Leiter in der Nähe befinden. Alle drei Kapazitäten, besonders k_{10}, k_{20} haben Verluste, weil sie außer Luft auch Holz, Glas, Hartgummi als Dielektrikum enthalten; δ_{12}, δ_{10}, δ_{20} seien die entsprechenden Verlustwinkel.

Die 6 zu messenden Größen k_{12}, k_{10}, k_{20}, δ_{12}, δ_{10}, δ_{20} sind jedoch nicht eindeutig definierte Konstanten des Kondensators, sondern hängen von seiner Lage zur Erde ab. Diese Undefiniertheit erstreckt sich allerdings der Hauptsache nach nur auf die beiden Teilkapazitäten k_{10}, k_{20} gegen Erde und ihre Verlustwinkel, in viel geringerem, oft verschwindendem Maße auf k_{12}, δ_{12}, da k_{12} meist groß gegen k_{10}, k_{20} ist. Schaltet man den Kondensator in den Zweig 1 der Brücke ein, etwa Belegung 1 an Eckpunkt b, Belegung 2 an e, so kommt, ähnlich wie bei der Schaltung IV, Abschn. 5, die Kapazität k_{12} und ihr Verlustwinkel δ_{12} zur Messung. Die der ganzen Brücke parallelliegende Teilkapazität k_{10} ist ohne Einfluß auf die Nullabgleichung, während k_{20} parallel zu r_3 liegt und gemäß Formel (12), meist nur als kleine Korrektion von Δc_4, in die Bestimmung von δ_{12} eingeht. Die Verluste von k_{10} und k_{20} spielen gar keine Rolle. Kommt es also nur auf die Bestimmung von k_{12}, δ_{12} an, so würde die Undefiniertheit eines solchen unabgeschützten Drehkondensators bei Brückenmessungen nur wenig stören, wenn nicht außer den Teilkapazitäten k_{10}, k_{20} gegen Erde auch Teilkapazitäten gegen andere Leiter der Brückenschaltung unvermeidlich wären. Diese und die durch sie bedingte Unsicherheit der Brückenabgleichung läßt sich zuverlässig nur durch Abschützung des Kondensators mittels einer ihn allseitig umschließenden, leitenden Hülle beseitigen.

Aus diesem Grunde sind derartige Hüllen bei den im folgenden mitgeteilten Messungen an den Kondensatoren Nr. 1, 2, 3 vom Typus des Bildes 5 angewandt.

[1]) Einige bei Hochfrequenz gewonnene Meßresultate sind kürzlich von E. Schott l. c. veröffentlicht.



Bei den Kondensatoren 1 und 3 bestand die Schutzhülle aus einem mit Stanniol austapezierten Holzkasten von 50 × 50 × 50 cm, in dessen Mitte der Kondensator aufgestellt wurde; bei Nr. 2 wurde das Glasgefäß (Bild 5) durch ein solches aus Zinkblech ersetzt. Die Abschützung ist somit bei letzterem nicht ganz vollständig, bietet aber gegenüber der bei Nr. 1 und 3 angewandten insofern einen Vorteil, als Drehknopf und Ableseskala bequem zugänglich bleiben. Indem man die in Abschn. 5 erörterten drei Schaltungsweisen I, II, III von Schutzgehäusen und Belegungen anwandte, wurden für je sechs Einstellungen — 0°, 10°, 50°, 90°, 130°, 170° — der Kondensatoren die drei Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{10}$, $k_{12} + k_{20}$, $k_{10} + k_{20}$ (0 bedeutet jetzt Schutzhülle) und ihre Verlustwinkel gemessen, aus denen sich die in den Tabellen 7, 8, 9 angegebenen Werte von k_{12}, k_{10}, k_{20} und deren Verlustwinkel einzeln berechnen lassen.

Tabelle 7.

Kapazitätswerte c in $\mu\mu$F und Verlustwinkel δ in Minuten für die Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{10}$, $k_{12} + k_{20}$ und die Teilkapazitäten k_{12}, k_{10}, k_{20} des Drehkondensators Nr. 1.

Einstellungen des Kondensators	$k_{12} + k_{10}$			$k_{12} + k_{20}$			k_{12}			k_{10}			k_{20}		
	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$
			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$
0°	77,8	19	15	83,6	14	12	67,0	3	2	1,1	$1,2 \cdot 10^2$	1,3	1,7	6_0	1,0
10°	239	6,5	15	240	5	12	226	0,8	1,5	1,3	1,0 "	1,3	1,4	7_0	1,0
50°	1032	1,5	15	1036	0,8	9	1021	0,1	1	1,1	1,3 "	1,4	1,5	5_0	8
90°	1841	0,8	14	1843	0,4	7	1829	0,05	0,5	1,2	1,2 "	1,4	1,4	5_0	7
130°	2628	0,55	14	2631	0,2	5,5	2617	0	0	1,1	1,2 "	1,4	1,4	4_0	5
170°	3427	0,45	15	3425	0,1	4	3413	0	0	1,3	1,1 "	1,5	1,2	4_0	4
10°—0°	161	<0,1		157	0	0	160	<0,1							
50°—0°	955			953	−0,3	−3	955								
90°—0°	1763			1760	−0,2	−4	1762								
130°—0°	2550			2547	0,2	−6	2550								
170°—0°	3349			3341	0,2	−7	3347								

Zur Kontrolle wurden zum Teil auch Messungen nach Schaltung IV, Abschn. 5, ausgeführt, die k_{12}, δ_{12} direkt, und zwar innerhalb der hier angestrebten Meßgenauigkeit in Übereinstimmung mit den berechneten Werten ergaben.

Die Genauigkeit der Verlustmessung nimmt mit abnehmender Kapazität ab, ist also besonders für die sehr kleinen Teilkapazitäten k_{10}, k_{20} nur gering.

Die Betrachtung zunächst des oberen Teiles der Tabellen lehrt folgendes: Die Teilkapazitäten k_{10}, k_{20} gegen die Hülle haben außerordentlich hohe Verluste. Verhältnismäßig klein sind die Verlustwinkel für die wesentlichste Teilkapazität k_{12}, sie nehmen mit wachsenden Werten von k_{12} schnell ab. In den Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{10}$, $k_{12} + k_{20}$ machen sich die Verluste von k_{10} und k_{20} stark geltend. So hat z. B. Kondensator Nr. 1 bei einer Kapazität $k_{12} + k_{10}$ von etwa 1000 $\mu\mu$F einen Verlustwinkel von 1,5′, d. i. etwa ebensoviel wie ein guter Glimmerkondensator gleicher Kapazität (vgl. Tabelle 4). Als Normale für genauere Verlustmessungen können daher solche Drehkondensatoren nicht ohne weiteres benutzt werden.

Wesentlich günstiger hinsichtlich der Verluste als die zwischen den Kondensatorklemmen liegenden Gesamtkapazitäten verhalten sich nun aber die zwei Einstellungen des Kondensators entsprechenden Kapazitätsdifferenzen. Diese Differenzen sind, wie in Abschn. 6 gezeigt, bei Drehkondensatoren der besonderen Konstruktion der Reichsanstalt völlig verlustfrei. Die Konstruktion der technischen Drehkondensatoren entspricht zwar in der Regel jenen besonderen Anforderungen nicht, doch ist die in Abschn. 6 angegebene Beziehung $c \cdot \delta =$ konst. für alle Werte von c, wie aus den Tabellen

ersichtlich, mit mehr oder wenig großer Annäherung erfüllt. Bei den Kondensatoren 2 und 3 übersteigen die Schwankungen jenes Produktes bei verschiedenen Einstellungen meist kaum die Meßgenauigkeit.

Beim Kondensator 1 nimmt das Produkt $c \cdot \delta$ für die Betriebskapazität $k_{12} + k_{20}$ ebenso auch für k_{20} und k_{12} mit zunehmender Kapazität deutlich ab; doch ist sein Wert für k_{12} sehr klein und deshalb von geringem Einfluß. Für k_{12} und k_{10} aber ergibt sich ein merklich konstanter Betrag des Produktes, während $c \cdot \delta$ für k_{10} mit wachsender Kapazität ein wenig ansteigt. Dies Verhalten ist verständlich, wenn man bedenkt, daß mit abnehmender Kapazität immer mehr elektrische Kraftlinien (Streulinien) vom beweglichen Plattensystem (2) aus durch das Glasgehäuse usw. (Bild 5) zur Schutzhülle verlaufen, was eine Vergrößerung der Verluste zur Folge haben muß. Beim festen Plattensystem (1) andererseits wird die Anzahl der Streu-

Tabelle 8.

Kapazitätswerte c in $\mu\mu$F und Verlustwinkel δ in Minuten für die Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{10}$, $k_{12} + k_{20}$, und die Teilkapazitäten k_{12}, k_{10}, k_{20} des Drehkondensators Nr. 2.

Einstellungen des Kondensators	$k_{12} + k_{10}$			$k_{12} + k_{20}$			k_{12}			k_{10}			k_{20}		
	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$
			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$
0°	82,$_0$	3,$_5$	3	55,$_7$	6,$_5$	3,$_5$	39,$_5$	3	1	4_3	4	2	1_6	1_6	3
10°	177	1,$_8$	3	151	2,$_7$	4	135	1	1,$_5$	4_2	4	2	1_6	1_6	3
50°	583	0,6	3,$_5$	555	0,7	3,$_5$	540	0,3	1,$_5$	4_3	5	2	1_5	1_6	2
90°	1000	0,3$_5$	3,$_5$	968	0,4$_5$	4,$_5$	956	0,1$_5$	1,$_5$	4_4	4	2	1_2	2_5	3
130°	1438	0,2$_5$	3,$_5$	1403	0,3$_5$	4,$_5$	1393	0,1	1,$_5$	4_4	4	2	1_0	3_1	3
170°	1889	0,2	4	1856	0,2$_5$	5	1847	0,1	2	4_3	4	2	9	2_8	3
10°—0°	95,$_1$	0,$_3$		95,$_4$	0,$_4$		95,$_0$	0,$_3$							
50°—0°	501	0,$_2$		500			501								
90°—0°	918			912			917								
130°—0°	1356	<0,$_1$		1347	<0,$_1$		1353	<0,$_1$							
170°—0°	1807			1800			1807								

Tabelle 9.

Kapazitätswerte c in $\mu\mu$F und Verlustwinkel δ in Minuten für die Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{10}$, $k_{12} + k_{20}$ und die Teilkapazitäten k_{12}, k_{10}, k_{20} des Drehkondensators Nr. 3

Einstellungen des Kondensators	$k_{12} + k_{10}$			$k_{12} + k_{20}$			k_{12}			k_{10}			k_{20}		
	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$	c	δ	$c \cdot \delta$
			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$			$\times 10^2$
0°	30,$_9$	18	6	27,$_5$	14	4	23,$_6$	7	2	7	5_0	4	4	5_0	2
10°	57,$_7$	10	6	54,$_9$	7	4	50,$_5$	4	2	7	6_0	4	4	5_0	2
50°	187	3,$_5$	7	183	2	4	179	1	2	7	6_0	4	4	4_0	1
90°	314	2,$_1$	6	309	1,$_2$	4	306	0,7	2	8	6_0	4	3	5_0	1
130°	439	1,$_6$	7	435	0,9	4	431	0,6	2	8	6_0	4	3	4_0	1
170°	564	1,$_3$	7	558	0,5	3	555	0,4	2	8	6_0	5	2	2_0	0,$_5$
10°—0°	26,$_9$			26,$_8$	0,$_8$		27,$_0$	0,$_5$							
50°—0°	156			156			156								
90°—0°	282	<0,$_2$		281	<0,$_2$		282	<0,$_2$							
130°—0°	408			407			408								
170°—0°	533			531			532								

linien ziemlich unabhängig von der Stellung des Systems 2, also von der Kapazität sein. Für den Kondensator Nr. 2, dessen Schutzhülle aus einem an Stelle des Glasgefäßes eingesetzten Metallgefäß besteht, fallen Streulinien durch Glas usw. fort; Nr. 2 hat daher durchweg kleinere Verluste als Nr. 1 und 3. Bei Kondensator Nr. 3, der eine viel kleinere Gesamtkapazität als 1 und 2 hat, spielen die Streulinien infolge seiner kleinen geometrischen Abmessungen eine geringere Rolle als bei Nr. 1. Aus den genannten Gründen ändert sich der Wert von $c \cdot \delta$ bei Nr. 2 und 3 nur wenig mit der Einstellung des Kondensators. Daß in der Tat das Glasgefäß und die hölzerne Grundplatte wesentlich zur Vergrößerung der Verluste beitragen, wurde bei Nr. 3 durch besondere Messungen festgestellt, bei denen der zunächst benutzte große Schutzkasten durch eine auf die Innenfläche des Glasgefäßes aufgeklebte Stanniolbelegung ersetzt war. Dadurch stieg k_{10} von 7 auf 26 $\mu\mu$F an; zugleich nahm der Verlustwinkel ab von etwa 60′ auf etwa 9′, also in stärkerem Maße als der Kapazitätszunahme entspricht, so daß die Verluste herabgesetzt wurden.

Da aus den Schwankungen des Produktes $c \cdot \delta$ mit der Einstellung nicht ohne weiteres zu erkennen ist, welche Verlustwinkel für die Einstellungsdifferenzen übrig bleiben, ist für diese in dem unteren Teil der Tabellen der Verlustwinkel gesondert angegeben, und zwar nach dem Ergebnis direkt für die Differenzen ausgeführter Messungen, da die Berechnung aus den kleinen Unterschieden der Produkte $c \cdot \delta$ des oberen Teiles der Tabellen unzuverlässig ist. Es zeigt sich, daß bei den beiden Kondensatoren Nr. 2 und 3 die Verlustwinkel der Kapazitätsdifferenzen, wenn man von der kleinsten Differenz 10^0—0^0 absieht, fast durchweg kleiner als 0,1′—0,2′ sind, und zwar sowohl für die Teilkapazitäten k_{12} als auch die Betriebskapazitäten $k_{12} + k_{10}$, $k_{12} + k_{20}$. Ganz ähnlich verhält sich auch Kondensator Nr. 1, hier sind für $k_{12} + k_{20}$ die für die Kapazitätsdifferenzen übrig bleibenden Verlustwinkel am größten.

Für die praktische Meßtechnik ergibt sich hieraus, daß man unter den erörterten Bedingungen (geeignete Abschützung, Differenzmessung) technische Drehkondensatoren der untersuchten Type bei Brückenmessungen als nahezu verlustfreie Normale benutzen kann. Kann man sich dagegen nicht auf die Benutzung von Kapazitätsdifferenzen beschränken, wie z. B. bei der Messung von Spulendämpfungen in elektrischen Schwingungskreisen, so werden in vielen Fällen die Verluste solcher Kondensatoren zu Fehlern Anlaß geben, die bei Dämpfungsmessungen keineswegs klein sein dürften.

Außer den eben behandelten drei Drehkondensatoren wurden ferner solche vom Typus der Firma Dr. Georg Seibt, Berlin-Schöneberg, untersucht. Diese haben gegenüber jenen den großen Vorzug, daß sie durch ein Metallgehäuse nahezu vollständig[1]) abgeschützt, also wohldefiniert sind. Damit fallen alle infolge der fehlenden Abschützung bei der erstgenannten Type auftretenden Schwierigkeiten fort; für jede Kondensatoreinstellung gibt es nur eine Kapazität, und zwar, da das feste Plattensystem mit dem Gehäuse verbunden ist, die Betriebskapazität $k_{12} + k_{20}$. Die Seibtschen Drehkondensatoren haben bekanntlich einen sehr geringen Plattenabstand und damit den praktischen Vorzug handlicher Form auch bei großen Kapazitätsbereichen. Der geringe Plattenabstand bringt aber den Nachteil verhältnismäßig geringer Spannungsbelastbarkeit mit sich. Für Meßzwecke der hier behandelten Art äußert sich dieser Nachteil darin, daß der Kondensator schon weit unterhalb des Funkenpotentials im hörbaren Frequenzbereich zu tönen beginnt und infolge davon, wie die Versuche zeigten, neben den dielektrischen noch weitere Verluste hat, die mit zunehmender Spannung schnell, ungefähr mit dem Quadrat derselben, ansteigen. Dieses Verhalten ist aus den in Tabelle 10 enthaltenen Meßergebnissen (Kondensator Nr. 4) ersichtlich. Für 9 verschiedene Einstellungen ist bei 3 verschiedenen Spannungen, etwa 250, 450, 600 Volt, der Frequenz 800 der Verlustwinkel gemessen Für jede Einstellung und Spannung ist außer dem Verlustwinkel wieder das Produkt $c \cdot \delta$, dem die Verluste proportional sind, in der Tabelle angegeben. Bei der gleichen

[1]) Vgl. Fußnote S. 110.



Tabelle 10.

Kapazitätswerte c in $\mu\mu$F und Verlustwinkel δ in Minuten des Drehkondensators Nr. 4 bei verschiedenen Spannungen.

Einstellungen des Kondensators	c	δ bei 250	δ 450	δ 600 Volt	$c \cdot \delta$ bei 250	$c \cdot \delta$ 450	$c \cdot \delta$ 600 Volt
					$\times 10^2$	$\times 10^2$	$\times 10^2$
1^0	48,5	23	23	23	11	11	11
10^0	61,5	16,8	16,9	16,9	10	10	10
50^0	496	2,3	2,8	2,3	12	11	12
70^0	762	1,6	1,7	1,7	12	13	13
90^0	1047	1,2	1,25	1,5	12,5	13,5	15,5
110^0	1338	0,9	1,2	1,4	12	16,5	19
130^0	1626	0,85	1,15	1,45	13,5	19	23,5
150^0	1902	0,75	1,05	1,4	14	20	26,5
170^0	2149	0,75	0,95	1,2	15,5	20	25,5
10^0-1^0	13	−8	−5,5	−5,5	−1	−1	−1
50^0-1^0	448	0,1	0	0,1	0,5	0	0,5
70^0-1^0	713	0,15	0,25	0,25	1	1,5	2
90^0-1^0	999	0,15	0,2	0,45	1,5	2	4,5
110^0-1^0	1289	0,1	0,4	0,6	1	5	7,5
130^0-1^0	1578	0,15	0,5	0,8	2,5	7,5	12,5
150^0-1^0	1853	0,15	0,5	0,85	3	8,5	15,5
170^0-1^0	2100	0,2	0,4	0,7	4,5	9	14,5

Spannung wächst $c \cdot \delta$ mit zunehmender Kapazität, ändert sich also im umgekehrten Sinne wie in Tabelle 7 für $k_{12} + k_{20}$ bei Kondensator Nr. 1. Da das Tönen des Kondensators, wie leicht verständlich, erst dann beginnt, wenn die beweglichen Platten genügend weit in die Zwischenräume zwischen den unbeweglichen hineingedreht sind, etwa bei Einstellung 50^0, so sind die Verlustwinkel bei kleinen Kapazitäten merklich unabhängig von der Spannung. Bei weiterem Hineindrehen der Platten, d. h. zunehmender Kapazität, wird das Tönen immer lauter, dementsprechend wächst das Produkt $c \cdot \delta$, also die Verluste, an, und zwar um so stärker, je höher die angelegte Spannung ist. Da sich also bei dem Seibt-Kondensator (Nr. 4) die Verluste mit der Einstellung ändern, so weisen hier auch die Kapazitätsdifferenzen (s. unteren Teil der Tabelle 10) wenigstens bei höheren Spannungen Verluste auf, die wesentlich größer sind als im Falle der Kondensatoren Nr. 1, 2, 3. Bei 250 Volt sind allerdings die Verluste der Kapazitätsdifferenzen sehr klein. Bei 600 Volt aber sind sie für die größten Einstellungen infolge Tönens etwa ebenso groß wie die dielektrischen Verluste. Bei einem anderen Drehkondensator vom gleichen Typus wurde im wesentlichen das gleiche Verhalten beobachtet, dagegen war bei den oben besprochenen Kondensatoren Nr. 1, 2, 3, die übrigens bei 600 Volt ebenfalls tönten, wenn auch sehr leise, ein Spannungseinfluß auf die Verluste nicht nachweisbar.

Insoweit die hier gemachten Beobachtungen auch für andere Drehkondensatoren der Seibt-Type zutreffen, können diese also als Normale für genauere Verlustmessungen an kleinen Kapazitäten nur bei niedrigen Spannungen dienen, und zwar dürfen, ebenso wie bei den Kondensatoren vom Typus Bild 5, nur Einstellungsdifferenzen benutzt werden. Für das Verhalten im Frequenzbereich der drahtlosen Telegraphie sind Schlüsse aus den hier mitgeteilten Messungen im akustischen Frequenzbereich bei der Seibt-Type keineswegs, bei den anderen untersuchten Kondensatoren nur qualitativ zulässig.

Die mitgeteilten Erfahrungen ergeben für die Konstruktion von verlustfreien Drehkondensatoren folgende Gesichtspunkte, die übrigens bei den schon vor einer



Reihe von Jahren gebauten Präzisionsdrehkondensatoren der Reichsanstalt (l. c.) beobachtet sind:

1. Vollständige Abschützung,
2. Sparsamste Verwendung fester Dielektrika,
3. Anordnung der festen Dielektrika, am besten Quarzglas, nach dem Schema Bild 3, Seite 114,
4. Isolierung beider Plattensysteme von der Schutzhülle kann für manche Meßzwecke vorteilhaft sein, ist aber, wenn 1, 2 und 3 innegehalten, nicht unbedingt erforderlich,
5. Bei Isolierung nur eines Plattensystems ist es zweckmäßig, das feste System zu isolieren und das bewegliche mit der Hülle zu verbinden.

9 Zusammenfassung.

Eine für genaue Messung kleiner Verlustwinkel ausgearbeitete Brückenmethode und Meßanordnung wird beschrieben. Als Vergleichsnormale dienten Normalluft-Kondensatoren der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, bei denen Verluste, wie durch besondere Messungen festgestellt wird, innerhalb der erreichbaren Genauigkeit der Winkelmessung von 1″ bis 2″ nicht nachweisbar sind.

Verlustmessungen wurden, hauptsächlich bei $n = 800$, ($\omega = 5000$), ausgeführt an käuflichen Glimmerkondensatoren (Stöpsel- und Kurbelkondensatoren) und an einer Anzahl technischer Drehkondensatoren. Für erstere zeigte sich u. a., daß die Verluste der kleinsten Kapazitätsbeträge zu einem großen, oft überwiegenden Teil nicht im Glimmer, sondern in den sonst noch beim Aufbau der Kondensatoren verwendeten festen Dielektriken, z. B. in dem die Stöpsel- und Kurbelkontakte isolierenden Hartgummi ihre Ursache haben. Für Drehkondensatoren ergaben sich z. T. recht beträchtliche Verluste (Winkel von der Größenordnung 1′—2′), die in den zum Aufbau der Kondensatoren verwendeten festen Dielektriken entstehen. Für verschiedene Einstellungen der untersuchten Drehkondensatoren ergaben sich in erster Annäherung die Verluste gleich groß, die Verlustwinkel also umgekehrt proportional der Kapazität. Die zwei verschiedenen Einstellungen entsprechenden Kapazitätsdifferenzen sind daher angenähert verlustfrei. Eine Ausnahme machen Drehkondensatoren mit sehr kleinem Plattenabstand, bei denen infolge Tönens bei großen Werten der angelegten Wechselspannung neben den dielektrischen noch weitere Verluste auftreten.

Stabilität der Ölschicht bei Lagern.

Von

Claudius Schenfer, Moskau.

Bekanntlich haben wir es beim Rotieren des Zapfens im Lager mit dem Reiben eines festen Körpers gegen einen flüssigen zu tun: zwischen dem Zapfen und der Oberfläche der Lagerschale bildet sich eine dünne Ölschicht, deren Dicke (von 100 bis 200 μ), wie es die von Herrn V. Vieweg ausgeführten Versuche gezeigt haben, von einer ganzen Reihe von verschiedenen Faktoren abhängig ist. Mit Hilfe der von ihm angegebenen Methode hat Herr V. Vieweg[1]) die mittlere Dicke der Ölschicht beobachtet.

[1]) Archiv für Elektrotechnik, VIII, 364.



Man könnte nun glauben, daß bei laufender Maschine die Höhe dieser Ölschicht Schwankungen unterworfen sein sollte und daß dieses Öl zeitweise sogar aus dem Zwischenraume zwischen der Welle und der Lagerschale vollständig ausgepreßt sein sollte infolge der Stöße, die unvollkommene Ausbalancierung der rotierenden Teile und einige andere Phänomena hervorrufen.

Um über diese Frage Klarheit zu schaffen, hat nun der Verfasser folgende Versuche ausgeführt.

Der Wellenhals A (s. Bild 1) und der Lagerkörper C wurden in den elektrischen Kreis, bestehend aus einer Batterie von ca. 10 Volt — B, einem Widerstande R von 5 Ω und der Oszillographenschleife O, eingeschaltet.

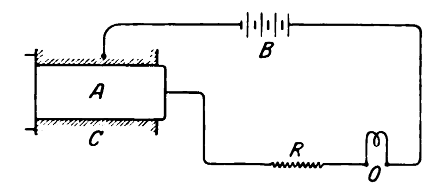


Bild 1. Versuchsanordnung.



Bild 2. n = 80 Touren p. M.

Bei laufender Maschine erschienen der Zapfen A und die Lagerschale C durch die dünne Ölschicht in elektrischer Hinsicht voneinander isoliert; wenn dieses Öl zeitweise ausgepreßt wird, so muß im Batteriekreise in dem Augenblick Strom erscheinen. Das Bild 2 zeigt das betreffende Oszillogramm, gewonnen für einen 30 PS-Gleichstrommotor (mit Lagerdruck p = 1 kg pro cm²) bei n = 80 Umdr. p. M.;

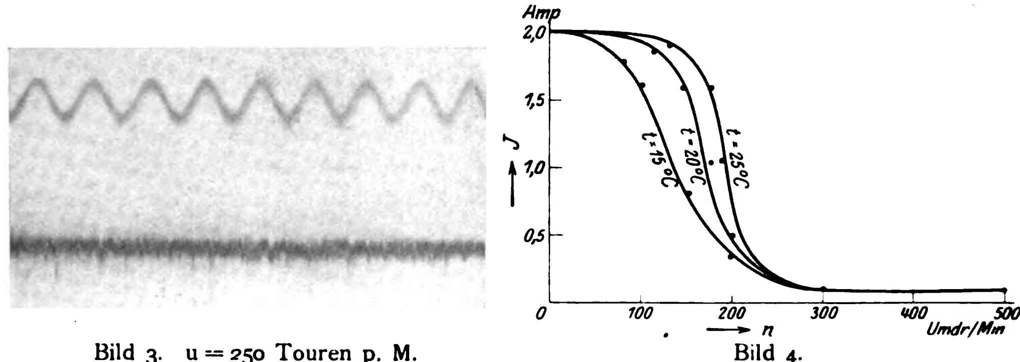


Bild 3. u = 250 Touren p. M.

Bild 4.

die Sinuskurve mit c = 50 Perioden p. Min. auf der Figur ist für die Bestimmung des Zeitmaßes aufgenommen. Falls bei der Rotation der Maschine die Dicke der Ölschicht konstant geblieben wäre, so hätten wir anstatt der gezähnten Kurve des Bildes 2 eine mit der Nullinie zusammenfallende Gerade erhalten.

Das Oszillogramm des Bildes 3 zeigt uns eine analoge Kurve für eine etwas größere Umdrehungszahl p. M. = 250.

Bei einem weiteren Versuch wurde an Stelle der Oszillographenschleife O (vgl. Bild 1) ein Strommesser eingeschaltet, um die Abhängigkeit der Stromstärke J im Kreise der Batterie B und des Lagers A—C von der Tourenzahl der Maschine zu untersuchen. Dabei wurden die Kurven des Bildes 4 erhalten. Wie aus diesen Kurven ersichtlich, stellt sich eine stabile Ölschicht im Lager der zu untersuchenden Maschine erst beim Erreichen einer Umdrehungszahl von 250—300 Touren p. Min. ein. (Die normale Tourenzahl p. M. dieser Maschine n = 800.)

Archiv für Elektrotechnik

XI. Band. 4. Heft. 1922.

Untersuchungen an Hochspannungstransformatoren mit dem Braunschen Rohr.

Von

Hermann Behnken.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Dem Verfasser erwuchs die Aufgabe, den zeitlichen Verlauf der Spannung an einem im Betriebe befindlichen Röntgenrohr zunächst qualitativ, nach Möglichkeit aber auch quantitativ festzustellen. Die Schwierigkeiten dieser Aufgabe sind dadurch bedingt, daß man es einmal mit sehr hohen Spannungen — es kommen bis 200 kV_{eff} in Frage — zu tun hat. Außerdem ist die einem Röntgenrohr zugeführte Leistung gering. Ein technisches Therapierohr des Coolidge-Typs verträgt bei Dauerbelastung selten mehr als 2—3 Milliampere. Es muß also, um die Betriebsbedingungen für das Röntgenrohr möglichst wenig zu beeinflussen, eine Untersuchungsmethode gewählt werden, die so wenig Energie wie möglich verbraucht. Drittens ist, besonders wenn sich im Röhrenstromkreis ein rotierender Nadelschalter befindet, um die unerwünschte Stromrichtung vom Röntgenrohr abzuhalten, mit dem Auftreten von Hochfrequenzschwingungen zu rechnen. Diese Lage der Dinge ließ es als aussichtsreich erscheinen, einen Versuch mit dem Braunschen Rohr zu unternehmen. Eine schließlich als brauchbar befundene Versuchsanordnung soll im folgenden beschrieben werden. Damit ausgeführte Untersuchungen an Röntgenapparaturen werden später mitgeteilt werden.

Der Verfasser hat eine im Prinzip von A. Wehnelt[1]) angegebene Schaltungsweise der Braunschen Röhre benützt, die den zu stellenden Ansprüchen bis zu einem gewissen Grade genügte. Da es bei dem bekannten Prinzip der Braunschen Röhre wesentlich Sache des Ausprobierens ist, zu einer befriedigenden Versuchsanordnung zu gelangen, so soll die letztere hier genauer beschrieben werden, ohne daß damit behauptet wird, daß nicht auch andere Dimensionierungen der Apparatur, vielleicht sogar noch besser, zum Ziele führen.

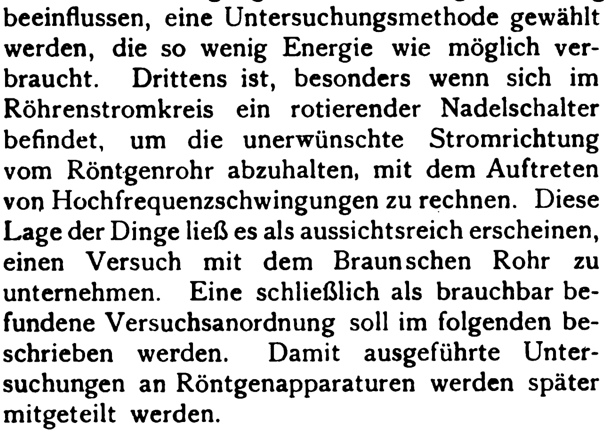
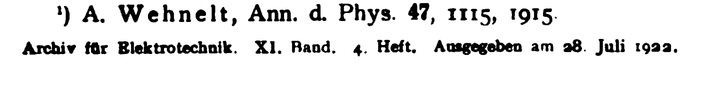


Bild 1.

Bild 2

Die Gestalt und die wichtigsten Abmessungen der benützten Röhre sind aus Bild 1 und 2 ersichtlich. Die Maße sind in cm angegeben. Die Kathode K besteht aus Alu-



[1]) A. Wehnelt, Ann. d. Phys. **47**, 1115, 1915.

minium und ist auf einen Aluminiumstiel aufgeschraubt. Dieser ist in den Kernteil eines Schliffes mit weißem Siegellack eingekittet. Etwa 2 cm oberhalb der Kathode ist auf den Stiel eine kreisrunde Aluminiumplatte P aufgeschraubt von solchem Durchmesser (ca. 2,4 cm), daß sie den Schliff gerade verschließt. Der darüber befindliche Hohlraum ist in bekannter Weise mit Stanniolkügelchen ausgefüllt. Durch den Schliff wird es leicht ermöglicht, die Kathode herauszunehmen und abzuschmirgeln, wenn ihre Oberfläche durch längeren Gebrauch gelitten hat. Dicht unterhalb der Kathode ist außen um das Rohr ein Ring R aus Kupferdraht herumgelegt und durch einen außen herumgeführten Draht D mit der Kathode leitend verbunden Hierdurch werden Durchschläge durch die Glaswand, die erfahrungsgemäß an dieser Stelle bei zu großer Härte des Rohres leicht eintreten können, ausgeschlossen. Einige cm unterhalb der Kathode befindet sich ein seitliches Ansatzrohr mit einem Hahn, welches zu einer Gaede-Quecksilberpumpe führt. Die Anode A besteht aus einem kleinen oben offenen, zylindrischen Aluminiumtopfe, der das Rohr gerade ausfüllt, und besitzt einen in die Glaswand eingeschmolzenen dünnen Platindraht als Zuleitung. Die Anode dient gleichzeitig als Blende für den Kathodenstrahl und hat dazu mitten in ihrem Boden ein kreisrundes Löchlein D von $^1/_2$ mm Durchmesser. In einem erweiterten Teile des Rohres befindet sich der Ablenkungskondensator C, der aus zwei rechteckigen 15 cm langen und 4 cm breiten Aluminiumblechen von 1 mm Dicke besteht. Die Bleche werden gehalten durch je zwei Aluminiumstäbe, die in 4 seitliche Ansatzröhren mit weißem Siegellack eingekittet sind und zugleich als Zuleitungen dienen. Unterhalb des Kondensators verjüngt sich das Rohr zunächst wieder, um schließlich in einen breiten Glaszylinder überzugehen, der unten mit einem eben geschliffenen Flansch endigt. Auf diesen Flansch ist der Leuchtschirm L wieder mit weißem Siegellack aufgekittet. L ist eine 5 mm dicke Spiegelglasplatte, die auf der Oberfläche eine sehr dünne durchscheinende Schicht eines Kalziumwolframatpräparates trägt, das unter der Bezeichnung „Wolframsaures Kalzium geglüht für Schirme" von der Firma C. A. F. Kahlbaum, G. m. b. H., Adlershof bei Berlin, bezogen wurde. Bei Kathodenstrahlenbeleuchtung erstrahlt es sehr hell kornblumenblau und leuchtet kaum merklich grünlich nach. Zum Aufbringen der Leuchtsubstanz wurde die Spiegelglasplatte in eine photographische Schale mit Alkohol gelegt und dann aus einer Höhe von etwa 25 cm das Leuchtpulver durch ein sehr feines Gazesieb aufgestreut, bis eine gleichmäßige dünne Schicht von geeigneter Stärke entstanden war. Dies erforderte einiges Probieren. Dann wurde die Platte vorsichtig herausgenommen und vor Staub geschützt getrocknet Die Schicht haftet dann genügend fest, bleibt aber natürlich leicht verletzlich. Da der Leuchtfleck vorwiegend in der Durchsicht beobachtet werden soll, muß der Schirm außerordentlich dünn sein, um maximale Lichtstärke zu bekommen. Um den Kathodenstrahl auf einen ganz kleinen scharfen Fleck auf L zu konzentrieren, ist das Rohr dicht unter A von einer „Striktionsspule" S umgeben. Sie enthält ca. 450 Windungen aus baumwollisoliertem Kupferdraht und wird von einem Gleichstrom von etwa 2 Ampere durchflossen. Dieser muß regulierbar sein, da er sich der jeweiligen Härte des Rohres anzupassen hat. Die genaue Justierung von S ist wichtig. Die Spule muß deshalb in jeder denkbaren Richtung außer der Drehung um ihre eigene Achse verschiebbar und drehbar sein, was im vorliegenden Falle durch ein geeignet konstruiertes kräftiges Gestell aus Schmiedeeisen erreicht wird. So ist es möglich, auf L einen sehr hellen, kleinen, scharfen Leuchtfleck zu erzielen, während der von der Anode zur Kathode fließende Strom nur etwa $^1/_{10}$ Milliampere beträgt, was für das Rohr keineswegs eine erhebliche Belastung bedeutet.

Um dem Leuchtfleck noch eine zweite von der durch das Feld von C hervorgerufenen unabhängige Ablenkung geben zu können, sind nach bekanntem Prinzip an der verjüngten Stelle des Rohres unterhalb C rechts und links zwei in Serie



geschaltete Spulen S_1 und S_2 so angeordnet, daß sich ihre Magnetfelder addieren. Sie sitzen mit Reibung verschiebbar auf je einem Messingrohr M_1 und M_2, das je von einer hölzernen Stütze H_1 und H_2 gehalten wird. Die Spulen werden bequemerweise so justiert, daß die durch sie hervorgerufene Ablenkung auf derjenigen des elektrischen Feldes von C genau senkrecht steht. Sie sind auswechselbar. Meist wurde ein Spulenpaar aus umsponnenen Kupferdraht von 1 qmm Querschnitt von zusammen 2,5 Ω Widerstand benützt, das von Strömen der Größenordnung 0,1 A. durchflossen wurde.

Die ganze bisher beschriebene Anordnung war auf ein kräftiges Brett montiert und nach dem Vorbilde von H. Faßbender und G. Hupka[1]) so aufgestellt, daß die Achse des Rohres mit der Richtung des magnetischen Erdfeldes zusammenfiel. Nicht zu große Abweichungen von dieser Richtung lassen sich mit Hilfe der Spule S korrigieren.

Ist man auf eine Influenzmaschine als Hochspannungsquelle angewiesen, so ist die Einrichtung vielfach nicht sehr betriebssicher. Dies betonte kürzlich Brenzinger[2]) und benützte deshalb eine wohl zuerst von A. W. Hull[3]) zum Betriebe von Röntgenröhren verwandte Anordnung, die darin besteht, daß eine große Kapazität genügender Durchschlagsfestigkeit durch einen Hochspannungstransformator und ein in Reihe geschaltetes Glühventil immer im gleichen Sinne aufgeladen wird und dann einen dauernden hochgespannten Gleichstrom, der nur etwa $^1/_{10}$ Milliampere zu betragen braucht, an das Braunsche Rohr liefert. Wie bereits Hull betont, kann die Kapazität um so kleiner sein, je höher die Frequenz des den Transformator speisenden Wechselstromes ist. Der Verfasser konnte feststellen, daß sich bei zweitausend Perioden die Kapazität meistens ganz entbehren läßt, wenn nicht gerade Vorgänge einer ähnlichen Frequenz untersucht werden sollen. Man kommt dann mit folgender einfachen Schaltung aus:

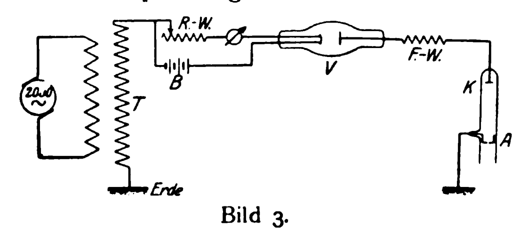


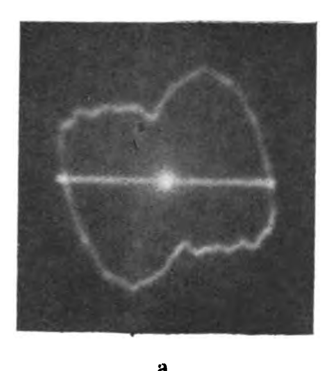
Bild 3.

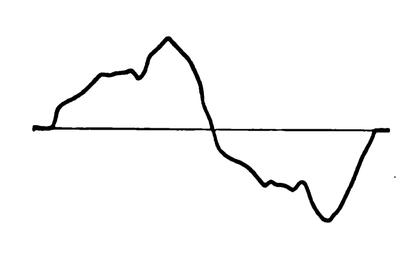
T ist der Hochspannungstransformator für Spannungen bis etwa 30 kV, dessen eine Klemme geerdet ist. Die isoliert aufgestellte Akkumulatorenbatterie B von 6 Volt heizt über den Regulierwiderstand RW die Kathode des Ventils V mit einem einmalig einzustellenden Strom von 5—7 Ampere je nach der Art des Ventiles, das von der Osram-Kommanditgesellschaft, Berlin N, Sickingerstraße 71, bezogen werden kann. FW ist ein Flüssigkeitswiderstand von etwa 10^7 Ohm, der das Braunsche Rohr vor Stromüberlastung schützt. Die Anode A des Rohres ist zu erden.

Man sollte zunächst vermuten, daß mit dieser Schaltung, bei der dem Rohre keineswegs eine konstante, sondern eine mit der Frequenz 2000 pulsierende Gleichspannung zugeführt wird, so daß auch kein konstanter Gleichstrom fließen kann, ein genügend homogener Kathodenstrahl nicht zustande kommt. Wenn dies so wäre, so müßte der Leuchtfleck des Rohres z. B. bei der Annäherung eines permanenten Magneten nicht nur abgelenkt, sondern zu einem Streifen auseinandergezerrt werden, so daß eine saubere Analyse seiner Bewegung unmöglich würde. Der Versuch zeigt aber, daß der Fleck in Größe und Gestalt merklich unverändert bleibt. Nur bei sehr genauer Betrachtung entdeckt man an beiden Rändern je einen ganz schmalen, sehr lichtschwachen Saum, der von einer ganz geringen Inhomogenität der Kathodenstrahlen herrührt. Dies stört jedoch durchaus nicht und gelangt beim Photographieren des Fleckes gar nicht mit zur Darstellung. Es ist offenbar so, daß

[1]) Phys. Zeitschr. 13, 559, 1912.
[2]) Phys. Zeitschr. 22, 491, 1921.
[3]) A. W. Hull, Phys. Rev. 7, 405, 1916.

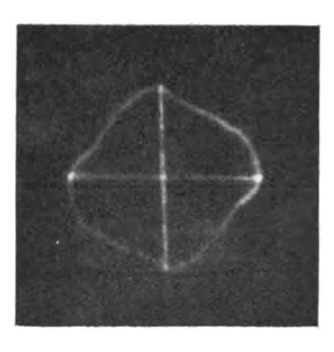
das Braunsche Rohr ähnlich wie eine Funkenstrecke spannungregelnd wirkt. Sobald die Zündspannung erreicht ist, findet bei weiterer Spannungssteigerung des Transformators im Rohr nur noch eine Stromzunahme statt, ohne daß sich das Kathodengefälle erheblich ändert. Die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen hängt daher

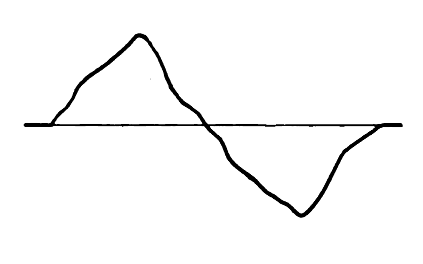




a Bild 4. b

im wesentlichen von der Gestalt der Röhre und dem in ihr herrschenden Gasdruck ab, nicht aber von der Klemmenspannung des Transformators. Daß es sich aber um einen periodisch unterbrochenen Kathodenstrahl handelt, sieht man sofort, wenn





a Bild 5. b

man durch gleichzeitiges Anlegen einer Wechselspannung an den Kondensator C und das Spulenpaar S_1, S_2 den Fleck Lissajoussche Figuren durchlaufen läßt. Diese bestehen dann nicht mehr aus einem glatten Kurvenzuge, sondern aus einer



a Bild 6. b

perlschnurartigen Punktfolge. Falls die Umschreibungsdauer einer Figur genau ein ganzzahliges Vielfaches der Periode der Kathodenstrahlunterbrechungen ist, scheinen die Punkte dem Betrachter still zu stehen, sonst wandern sie mehr oder weniger rasch die Kurve entlang, was zur Folge hat, daß auf einer photographischen Zeitaufnahme der Figur wieder ein glatter Kurvenzug erscheint. Beispiele von so aufgenommenen Figuren von 50 periodigen Vorgängen sind in den Bildern 4 bis 11

a Bild 7. b

a Bild 8. b

a Bild 9. b

a Bild 10. b

a Bild 11. b



gegeben. In den Bildern 4a bis 11a sind die gleichen Figuren analysiert. Die Ablenkung in wagerechter Richtung ist dabei sinusförmig und durch das Magnetfeld der Spulen S_1 und S_2 erzeugt, während die senkrechte Ablenkung, die eine komplizierte Form hat, durch die Spannung am Kondensator C bewirkt ist. Ihr zeitlicher Verlauf kann also durch Analyse der Kurven ermittelt werden. Die in der Abbildung punktiert erscheinenden Stücke der Bilder 10 und 11 sind retuschiert, um sie reproduktionsfähig zu machen. Die Belichtungszeit betrug $^1/_{10}$—$^1/_{20}$ Sekunden. Man sieht, daß bei diesen Aufnahmen die hochfrequente Unterbrechung des Kathodenstrahles durchaus nicht stört. Soll jedoch bei hochfrequenten Vorgängen die Kurve nur einmal überschrieben werden, so wird sich ein Ausgleichskondensator parallel zum Braunschen Rohr nicht entbehren lassen.

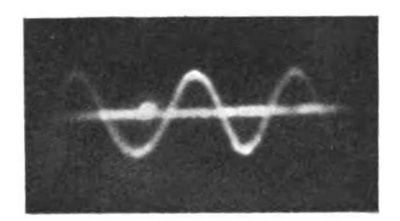


Bild 12

Bild 13.

Die Helligkeit des Leuchtfleckes ist groß genug, um bei nicht zu hohen Frequenzen auch nur einmalig überschriebene Kurven photographieren zu können. Es ist daher in bequemer Weise möglich, die zu untersuchende Spannung an C anstatt in Gestalt von Lissajousschen Figuren vielmehr so zu regestrieren, daß die Abszissenachse der photographierten Kurve direkt der Zeit proportional wird. Man braucht dazu nach dem Vorbilde von Rogowski[1]), Brenzinger[2]) und anderen nur dafür zu sorgen, daß die in Bild 1 gezeichneten Spulen S_1 und S_2 während der Beobachtungszeit von einem Strome durchflossen werden, der sich proportional der

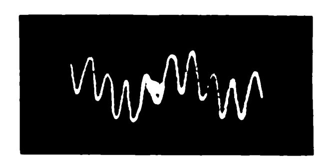


Bild 14.

Bild 15.

Zeit ändert. Dann wird auch das Magnetfeld und damit die Ablenkung des Leuchtfleckes zeitproportional. Hierfür ist jedoch auch ein sinusähnlicher Strom geeignet, wenn man aus der ganzen Periode nur einen kleinen in der Nähe des Stromwechsels liegenden, nahezu gradlinigen Teil der Stromkurve herausgreift. Legt man dann außerdem die zu untersuchende Spannung an C an, so beschreibt der Fleck eine Kurve der gewünschten Art. Die Aufnahmen der Bilder 12–14 sind so hergestellt, daß eine zu untersuchende Wechselspannung von ungefähr 50 Perioden an C gelegt wurde, während ein sinusförmiger Wechselstrom von ungefähr 6 Perioden durch S_1 und S_2 floß. Die Amplitude der magnetischen Ablenkung wurde dabei so groß gewählt, daß der Leuchtfleck nur während des gradlinigen Teiles der Stromkurve im Gesichtsfeld des photographischen Apparates blieb. Trotzdem ist natürlich Momentbelichtung nötig, um ein zweimaliges Überschreiben der Kurve zu verhüten

[1]) Diese Zeitschrift 9, 115, 1920.
[2]) l. c.

Bild 14, das eine 50periodige Wechselspannung mit sehr starker 5. Oberfrequenz darstellt, ist für die Reproduktion retuschiert worden, desgleichen Bild 15, das den Spannungsverlauf zwischen den Sekundärklemmen eines größeren mit Gleichstrom und Quecksilberunterbrecher betriebenen Induktoriums darstellt.

Für solche Aufnahmen ist freilich eine sehr lichtstarke photographische Optik nötig (Blendenöffnung zu Bildweite = 1 : 4 bis 1 : 3). Eine solche wurde in der Weise improvisiert, daß vor einen gewöhnlichen kleinen Handapparat („Ica-Niclas" mit „Novar-Anastigmat", 1 : 6, 8, Foc. 12 cm, Plattenformat 6 × 9 cm) ein zweites sehr lichtstarkes Objektiv (Petzval-Objektiv) von 9 cm Brennweite gesetzt wurde, so daß die Bildweite erheblich verringert wurde, während die Blendenöffnung die gleiche blieb[1]). Wie man sieht, gelingt eine qualitativ richtige Veranschaulichung der Kurven so ganz gut. Für die quantitative Auswertung verdienen aber die Lissajousschen Figuren wegen ihrer größeren Exaktheit den Vorzug.

Wie zu Anfang mitgeteilt ist, war der Zweck der beschriebenen Anordnung die Analyse von Hochspannungen von der Größenordnung 100 kV. Natürlich kann man so hohe Spannungen nicht einfach an den Kondensator C des Braunschen Rohres legen. Dazu müssen sie auf eine Größenordnung von etwa 50 Volt reduziert werden. Wehnelt[2]) benutzte dazu eine kapazitive Unterteilung, die in Bild 16 schematisch dargestellt ist. Dabei sind die Hochspannungsklemmen des Transformators H an zwei Metallplatten A und B geführt, die sich in solchem Abstande gegenüberstehen, daß ein Überschlag zwischen ihnen sicher ausgeschlossen ist. Die Platten bilden so einen Kondensator von einigen Zentimetern Kapazität. In der Mitte zwischen A und B befinden sich zwei weitere Kondensatorplatten C und D in nahem Abstande, die als Sonden dienen, um aus dem Gesamtfelde zwischen A und B einen kleinen, der Gesamtspannung proportionalen Teil herauszugreifen und dem Kondensator des Braunschen Rohres BR zuzuführen. Diese Schaltungsweise führte jedoch in vorliegendem Falle zu ungleichmäßigen Ergebnissen, da die Platten im Ablenkungskondensator des Braunschen Rohres leicht statische Ladungen annahmen, die nicht abfließen konnten und allerlei Verzerrungen der Kurven in ganz unkontrollierbarer und unreproduzierbarer Weise zur Folge hatten. Die Schaltung mußte deshalb so abgeändert werden, daß die störenden Ladungen abfließen konnten. Bewährt hat sich folgende, in Bild 17 dargestellte Anordnung[3]):

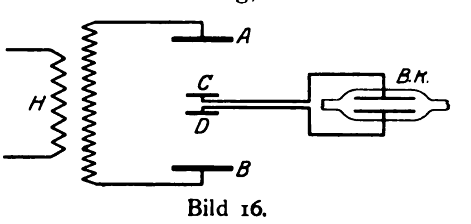


Bild 16.

Die eine Hochspannungsklemme von H war geerdet. Die andere führte an den kleinen Kondensator C_1, der aus zwei mit Stanniol überzogenen kreisförmigen Holzplatten von 20 bzw. 10 cm Durchmesser bestand, die sich in Abständen bis zu 56 cm verschiebbar und isoliert gegenüberstanden. Die Platten waren 3 cm dick und an den Rändern abgerundet, um das Sprühen zu unterdrücken. In Reihe mit C_1 befand sich ein Plattenkondensator C' von ca. 6000 cm Kapazität, dessen zweite Belegung geerdet war. Parallel hierzu lag der Kondensator C des Braunschen Rohres, dessen eine Belegung somit ebenfalls geerdet war. Von der anderen Belegung wurden die störenden Ladungen durch einen Flüssigkeitswiderstand R von $3 \times 10^6\ \Omega$

[1]) Diesen Ausweg aus einer unter den heutigen Verhältnissen nicht unerheblichen Schwierigkeit verdankt der Verfasser Herrn Dr. A. Wetthauer, der auch das Petzval-Objektiv aus seinem Privatbesitz freundlichst zur Verfügung stellte. Hierfür sei ihm auch an dieser Stelle gedankt.

[2]) l. c.

[3]) Anmerkung bei der Korrektur: Wie dem Verfasser nachträglich bekannt wurde, ist die Beseitigung der störenden Ladungen durch einen hohen Widerstand im Prinzip bereits von C. Samson (Dissertation, Berlin, 1918) benützt worden. Der Einfluß dieser Schaltung auf die Form der Kurven ist von Samson jedoch nicht erörtert.

zur Erde abgeleitet. Die Hochspannung lag also an einem System vom Schema des Bildes 18, wo C_2 den Wert $C' + C$ hat. Maßgebend für die Bewegung des Lichtfleckes der Braunschen Röhre ist die Spannungsdifferenz zwischen den Punkten P_1 und P_2. In welchem Verhältnis diese zu der gesuchten Gesamtspannung steht, ist mit Hilfe der symbolischen Darstellung durch komplexe Größen wie folgt zu berechnen:

Die Gesamtspannung sei $\mathfrak{E}$, die Spannung zwischen P_1 und P_2 sei $\mathfrak{E}_1$. Dann verhält sich $\mathfrak{E}_1$ zu $\mathfrak{E}$ wie der Widerstandsoperator der Elemente C_2 und R in Parallelschaltung, welcher w_1 genannt sei, zu dem Widerstandsoperator des gesamten Systemes w. w_1 berechnet sich aus

$$\frac{1}{w_1} = \frac{1}{R} - \frac{\omega C_2}{j} = \frac{j - R\omega C_2}{R j}$$

zu

$$w_1 = \frac{R j}{j - R\omega C_2} = \frac{R}{1 + j R \omega C_2}.$$

Der Widerstandsoperator des gesamten Systemes ist:

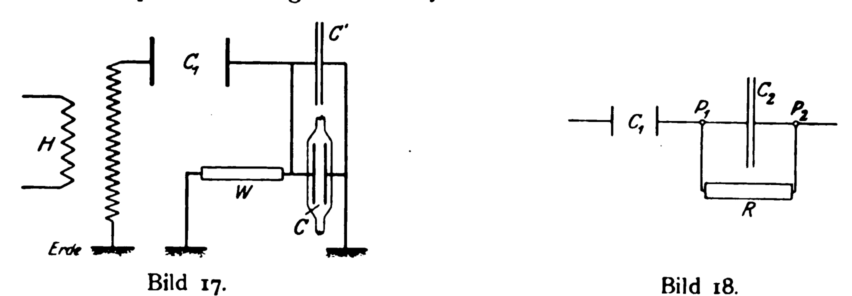


Bild 17. Bild 18.

$$w = w_1 - \frac{j}{\omega C_1} = \frac{R}{1 + j R \omega C_2} - \frac{j}{\omega C_1} = \frac{R\omega C_1 + R\omega C_2 - j}{\omega C_1 (1 + j R \omega C_2)}.$$

Da nun $\frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{E}} = \frac{w_1}{w}$ ist, folgt:

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} \cdot \frac{w_1}{w} = \mathfrak{E} \cdot \frac{\omega C_1 (1 + j R \omega C_2)}{R\omega (C_1 + C_2) - j} \cdot \frac{R}{(1 + j R \omega C_2)} = \mathfrak{E} \cdot \frac{R \omega C_1}{R\omega (C_1 + C_2) - j}$$

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E} \cdot \frac{R\omega C_1 [R\omega (C_1 + C_2) + j]}{R^2 \omega^2 (C_1 + C_2)^2 + 1}.$$

Der reelle Teil des komplexen Bruches ist

$$a = \frac{R^2 \omega^2 C_1 (C_1 + C_2)}{R^2 \omega^2 (C_1 + C_2)^2 + 1}.$$

Der imaginäre Teil ist

$$b j = \frac{R \omega C_1}{R^2 \omega^2 (C_1 + C_2)^2 + 1} \cdot j.$$

Hiernach findet man die Phasenverschiebung δ zwischen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}$ aus

$$\operatorname{ctg} \delta = \frac{a}{b} = R \omega (C_1 + C_2).$$

Das Verhältnis der Amplituden wird

$$\frac{E_1}{E} = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{(R\omega C_1)^2 (\operatorname{ctg}^2 \delta + 1)}{(\operatorname{ctg}^2 \delta + 1)^2}} = \frac{R \omega C_1}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \delta + 1}},$$

oder da $R\omega = \frac{\operatorname{ctg} \delta}{C_1 + C_2}$ ist

$$\frac{E_1}{E} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \delta}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \delta + 1}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \cos \delta.$$

Im vorliegenden Falle ist aber C_1 nur etwa 1 ‰ von C_2, so daß man einen zu vernachlässigenden Fehler begeht, wenn man setzt:

$$\operatorname{ctg}\delta = R\,\omega\,C_2 \quad \text{und} \quad \frac{E_1}{E} = \frac{C_1}{C_2}\cdot\cos\delta.$$

Ist das Produkt $R\,\omega\,C_2$ sehr groß, so wird δ nahezu o. $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}$ sind also in Phase. $\cos\delta$ wird nahezu 1. Das Amplitudenverhältnis wird mithin von ω unabhängig und einfach gleich dem Verhältnis der Kapazitäten C_1 und C_2. Dies ist der ideale Fall, der z. B. bei unendlich großem R eintreten würde. Ist aber $R\,\omega\,C_2$ kleiner, so nähert sich δ immer mehr dem Wert $\frac{\pi}{2}$, d. h. die Phasenverschiebung zwischen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}$ wächst. Außerdem wird sie von ω abhängig in dem Sinne, daß sie mit abnehmendem ω größer wird. Infolgedessen wird auch $\frac{E_1}{E}$ von ω abhängig, und zwar so, daß es mit abnehmendem ω ebenfalls abnimmt. Dies bedeutet, daß die Oberfrequenzen mit erheblich vergrößerter Amplitude und stark verschobener Phase im Vergleich zur Grundfrequenz erscheinen, so daß das Kurvenbild stark entstellt wird. Man wird sich also möglichst dem Idealfalle anzunähern suchen. In der Praxis ist man jedoch zu einem Kompromiß gezwungen, indem nämlich ein großes C_2 ein kleines R bedingt, da die störenden Ladungen von einer großen Kapazität langsamer abfließen als von einer kleinen.

Es soll nun für den vorliegenden praktischen Fall, wie er auf S. 135 beschrieben wurde, Art und Größe der möglichen Verzerrungen ermittelt werden. Hier ist also einzusetzen:

$$C_2 = 6000\,\text{cm} = 6{,}67\cdot 10^{-9}\,\text{F}. \qquad R = 3\cdot 10^6\,\Omega.$$
$$w = 2\pi\cdot 50 = 314.$$
$$R\,w\,C_2 = \operatorname{ctg}\delta = 6{,}28. \qquad \delta = 9^0\,3'. \qquad \cos\delta = 0{,}988.$$

Die Gesamtspannung eilt also für den Fall der Grundfrequenz bei 50 Perioden der Spannung am Ablenkungskondensator um $9^0\,3'$ nach. Das Amplitudenverhältnis unterscheidet sich von dem idealen Werte $\frac{C_1}{C_2}$ durch den Faktor 0,988, erscheint also um etwas über 1% zu klein.

Für die dritte Oberfrequenz dagegen wird

$$w = 942. \qquad R\,w\,C_2 = \operatorname{ctg}\delta = 18{,}84. \qquad \delta = 3^0\,2'. \qquad \cos\delta = 0{,}999.$$

Die Nacheilung ist hier also schon erheblich geringer als bei der Grundfrequenz. Die Phasenverschiebung gegenüber der Grundfrequenz beträgt $6^0\,1'$. Das Amplitudenverhältnis erreicht praktisch bereits den Idealwert. Für höhere Oberfrequenzen wird die Phasenverschiebung von $\mathfrak{E}_1$ gegen $\mathfrak{E}$ noch geringer. Die Phasenverschiebung der Oberfrequenz gegen die Grundfrequenz dagegen nimmt zu bis zu höchstens $9^0\,3'$.

Hieraus ergibt sich, daß wir in der Tat für den Fall der Frequenz 50 noch mit einer geringen Verzerrung der Kurven zu rechnen haben, die weniger die Amplituden der Oberfrequenzen im Vergleich zur Grundfrequenz, als vielmehr ihre Phasenverschiebung betrifft, die bis zu $9^0\,3'$ betragen kann. Für höhere Frequenzen wird diese Verzerrung immer geringer. Für den hier vorliegenden Zweck der Analyse der Spannung am Röntgenrohr sind so geringe Entstellungen der Kurvenform meist ganz belanglos, da so geringe Verschiedenheiten der Form der Spannungskurve auf die Quantität und Qualität der erzeugten Röntgenstrahlung keinen nachweisbaren Einfluß ausüben. Untersuchungen über diesen Gegenstand sollen später an anderer Stelle mitgeteilt werden.

Zusammenfassung.

In vorstehender Arbeit wird eine Ausführungsform des Braunschen Rohres beschrieben, die eine sehr scharfe und lichtstarke Wiedergabe von Wechselspannungskurven ermöglicht. Es wird eine Schaltung angegeben, die die Analyse von hohen Wechselspannungen von 100 kV und mehr gestattet und speziell geeignet ist, den Spannungsverlauf an Röntgenröhren zu untersuchen.



Zur Theorie der Kreisdiagramme.

Von

W. O. Schumann.

Bei der Ableitung und Auswertung der Kreisdiagramme macht sich in den letzten Jahren immer mehr das Bestreben geltend, unmittelbar aus dem komplexen Ausdruck das Diagramm mit all seinen Bestimmungsstücken zu entwickeln, ohne den Umweg über einige Inversionen oder längere geometrische Ähnlichkeitsbetrachtungen nehmen zu müssen [1]). Im folgenden möchte ich zeigen, wie man mit Zuhilfenahme einiger elementarer Tatsachen aus der Vektoranalysis und der vektoriellen Auffassung der komplexen Zahlen die wichtigsten Bestimmungsstücke des Kreises leicht ableiten kann.

Die allgemeinste Form, in der ein Kreis in der komplexen Ebene abhängig von einem reellen Parameter v gegeben sein kann, ist

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{A}\,v + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\,v + \mathfrak{D}}, \tag{1}$$

wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ beliebige komplexe Konstanten bedeuten. Zwei Punkte des Kreises sind sofort bestimmt:

$$v = 0. \qquad \mathfrak{Z}_k = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$$
$$v = \infty. \qquad \mathfrak{Z}_0 = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}}. \tag{2}$$

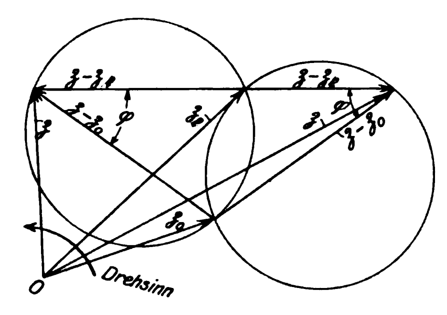


Bild 1.

Wünscht man den Kreis selbst zu bestimmen, so kann das zunächst geschehen, indem man nach dem Peripheriewinkel fragt, den die Sehnen über $\mathfrak{Z}_k\,\mathfrak{Z}_0$ nach einem beliebigen Kreispunkt einschließen. Ist $\mathfrak{Z}$ der laufende Punkt des Kreises so ergeben sich die von den Punkten $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{Z}_k$ auf ihn zulaufenden Sehnen zu

$$\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0 = \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{C} - \mathfrak{D}\,\mathfrak{A}}{(\mathfrak{C}\,v + \mathfrak{D})\,\mathfrak{C}}$$

und

$$\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_k = v\,\frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{A} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}}{(\mathfrak{C}\,v + \mathfrak{D})\,\mathfrak{D}}. \tag{3}$$

Das Verhältnis dieser beiden Vektoren ist

$$\frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_k}{\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0} = -\,v\,\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}. \tag{4}$$

[1]) Siehe z. B. O. Bloch, Die Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik, 1917, Zürich und W. Michael, Zur Geometrie der Ortskurven der graphischen Wechselstromtheorie, Diss. Zürich, 1919

Das Argument der komplexen Zahl $-\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}$ gibt den Winkel φ an, den die beiden Sehnen miteinander einschließen.

$$e^{j\varphi} = \frac{-\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}}{\left|\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}\right|} \quad (\pi > |\varphi| > 0). \tag{5}$$

Auf welcher Seite der Sehne der Mittelpunkt des Kreises liegt, ergibt sich aus einer einfachen geometrischen Betrachtung (Bild 1). Es sei das Argument von $\mathfrak{Z}_k$ größer als das von $\mathfrak{Z}_0$ ($\varphi_k > \varphi_0$, Voreilungswinkel seien positiv gemessen). Dann eilt $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0$ gegenüber $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_k$ vor, wenn der Kreis von $\mathfrak{Z}_k$ ($v = 0$) ausgehend in negativem Drehsinn umlaufen wird, der Winkel φ wird negativ, gleichgültig ob $\varphi \gtrless \frac{\pi}{2}$. Dasselbe gilt auch, wenn $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{Z}_k$ gleichphasig sind und $|\mathfrak{Z}_k| > |\mathfrak{Z}_0|$. Wird der Kreis dagegen von $\mathfrak{Z}_k$ ausgehend im positiven Drehsinn durchlaufen, so eilt $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_k$ gegen $\mathfrak{Z} - \mathfrak{Z}_0$ vor, der Winkel φ ist positiv. Ist $\varphi_k < \varphi_0$, so kehrt sich alles um. Je nach der Größe und dem Vorzeichen von φ und der relativen Lage von $\mathfrak{Z}_0$ und $\mathfrak{Z}_k$ ist auch die Richtung nach dem Mittelpunkt festgelegt.

Die Berechnung des Kreisradius selbst ergibt sich aus einer vektoriellen Betrachtung. Ist $\mathfrak{Z}$ der Vektor vom Ursprung an einem Kreispunkt und s die von irgendeinem Kurvenpunkt aus gemessene Kurvenlänge, so ist

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = \mathfrak{t} \cdot \frac{ds}{dv}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{t}$ den Tangenteneinheitsvektor an der Stelle $\mathfrak{Z}$ bedeutet (s. z. B. Spielrein, Lehrbuch der Vektorrechnung, S. 57 ff., Bloch, S. 98). Eine nochmalige Differentiation nach v ergibt

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} = \mathfrak{t}\frac{d^2 s}{dv^2} + \frac{ds}{dv} \cdot \frac{d\mathfrak{t}}{dv}. \tag{7}$$

Da

$$d\mathfrak{t} = d\Theta \cdot \mathfrak{n}, \tag{8}$$

wenn $\mathfrak{n}$ den Einheitsvektor in der Richtung der Normalen bedeutet und $d\Theta$ den Kontingenzwinkel, und da

$$R\,d\Theta = ds, \tag{9}$$

wo R der Krümmungsradius an der betreffenden Stelle und ds das Kurvenelement, wird

$$\frac{d\mathfrak{t}}{dv} = \mathfrak{n} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dv} \tag{10}$$

und schließlich aus (7)

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} = \mathfrak{t}\frac{d^2 s}{dv^2} + \mathfrak{n}\frac{1}{R} \cdot \left(\frac{ds}{dv}\right)^2. \tag{11}$$

Wird nun das Vektorprodukt aus $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$ und $\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}$ gebildet, so geben die Produkte von $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}]$ den Wert Null und man erhält

$$\left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}\right] = [\mathfrak{t}, \mathfrak{n}] \cdot \frac{1}{R}\left(\frac{ds}{dv}\right)^3. \tag{12}$$

Dividieren wir noch durch die dritte Potenz des Absolutbetrages von $\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}$, so entsteht

$$\frac{1}{R}[t, n] = \frac{\left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}\right]}{\left|\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right|^3} \tag{13}$$

und damit ist der Krümmungsradius bestimmt. Ist das Vorzeichen des Ausdrucks rechts positiv, so wird die Kurve an der Stelle im Sinne der positiven Drehung durchlaufen, im andern Falle entgegengesetzt. Wenden wir nun Gleichung (13) auf Gleichung (1) an, so erhalten wir

$$\frac{d\mathfrak{Z}}{dv} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^2} \tag{14}$$ [1]

$$\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2} = -2\frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C})}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^3}\mathfrak{C}. \tag{15}$$

Das Vektorprodukt läßt sich bei komplexen Vektoren sehr einfach darstellen. Es sei

$$\mathfrak{A} = A e^{j\varphi} \qquad \mathfrak{B} = B e^{j\psi} \tag{16}$$

und der zu $\mathfrak{B}$ konjugierte Vektor

$$\mathfrak{B}_k = B e^{-j\psi}, \tag{17}$$

so ist das Vektorprodukt

$$[\mathfrak{A}\mathfrak{B}] = -\mathfrak{Im}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_k) = -AB\sin(\varphi - \psi) \tag{18}$$

nach Größe und Richtung.

Damit wird

$$\left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}\right] = \mathfrak{Im}\left[-\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}\right)_k\right] = \mathfrak{Im}\left\{2\frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C})(\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C})_k \cdot \mathfrak{C}_k}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^2[(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})^3]_k}\right\}. \tag{19}$$

Nun ist

$$|\mathfrak{A}^3|_k = |A^3 e^{3j\varphi}|_k = A^3 e^{-3j\varphi} = (A e^{-j\varphi})^3 = |\mathfrak{A}_k|^3, \tag{20}$$

was demnach für gerade Potenzen nicht mehr zutrifft, und es ist

$$\mathfrak{A}^2\mathfrak{A}_k^2 = A^2 e^{2j\varphi} \cdot A^2 \cdot e^{-2j\varphi} = A^4 = |\mathfrak{A}|^4, \tag{21}$$

so daß aus (19) folgt

$$\mathfrak{Im}\left[-\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \left(\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}\right)_k\right] = \mathfrak{Im}\left\{2\frac{|\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|^2 \cdot \mathfrak{C}_k}{|\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}|^4(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})_k}\right\} \tag{22}$$

und schließlich

$$\frac{\left[\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}, \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dv^2}\right]}{\left|\frac{d\mathfrak{Z}}{dv}\right|^3} = \mathfrak{Im}\left\{2\frac{|\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}|^2}{|\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|} \cdot \frac{\mathfrak{C}_k}{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})_k}\right\}. \tag{23}$$

Nun wird, da

$$|\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}|^2 = (\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})_k. \tag{24}$$

$$\frac{1}{R}[t, n] = \mathfrak{Im}\left\{2\frac{(\mathfrak{C}v + \mathfrak{D})\mathfrak{C}_k}{|\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|}\right\} \tag{25}$$

und da $\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}_k$ reell ist und zum imaginären Teil nichts liefert, entsteht schließlich

$$\frac{1}{R}[t, n] = \mathfrak{Im}\left\{2\frac{\mathfrak{C}_k \cdot \mathfrak{D}}{\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}}\right\}$$

$$\frac{1}{R}[t, n] = \frac{2}{|\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C}|} \cdot \mathfrak{Im}(\mathfrak{C}_k\mathfrak{D}). \tag{26}$$

[1]) Die Größen $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{A}^2$ sind als komplexe Zahlen hier vektoriell aufzufassen. Das skalare Produkt $(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B})$ ist durch $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}_k) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_k\mathfrak{B})$ darzustellen.

Mit der Bestimmung des Radius ist auch der Radiusvektor nach dem Kreismittelpunkt bestimmt.

Fassen wir etwa einen bestimmten Kreispunkt ins Auge, z. B. den Punkt für $v = 0$, $\mathfrak{Z}_k = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$, so ist dort

$$\frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,v} = \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}^2}. \tag{27}$$

Vor dem Punkte $\mathfrak{Z}_k$ haben wir einen Strahl von der Länge R zu ziehen, senkrecht auf der Tangentenrichtung in diesem Punkte. Die Tangentenrichtung ist durch das Argument von $\frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,v}$ bestimmt. Haben wir eine Kurve, die mit wachsendem v im positiven Drehsinn durchlaufen wird $\left(\frac{1}{R}[t\,n] > 0\right)$, so ist die Richtung von $\frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,v}$ um 90^0 im Sinne der Voreilung zu drehen (Multiplikation mit $+j$), im andern Falle im Sinne der Nacheilung.

Wenn wir den Radiusvektor vom Ursprung mit $\mathfrak{M}$ bezeichnen, ergibt sich danach für beide Fälle

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + R\,j\,e^{j\psi}. \tag{28}$$

ψ bedeutet darin den Phasenwinkel von $\frac{d\,\mathfrak{Z}}{d\,v}$. Für R lassen wir im Sinne der Gleichung (26) positive und negative Vorzeichen zu. Ist $\mathfrak{A} = A\,e^{j\psi}$, so ergibt sich der Phasenwinkel zu

$$e^{j\psi} = \frac{\mathfrak{A}}{|\mathfrak{A}|}. \tag{29}$$

Damit wird nach (26) und (27) mit (28)

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + \frac{|\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}|}{2\,\mathfrak{Im}(\mathfrak{C}_k\,\mathfrak{D})} \cdot \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}}{|\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}|} \cdot \frac{|\mathfrak{D}^2|}{\mathfrak{D}^2}\,j. \tag{30}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + j \cdot \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}}{2\,\mathfrak{Im}(\mathfrak{C}_k\,\mathfrak{D})} \cdot \frac{|\mathfrak{D}|^2}{\mathfrak{D}^2} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} + j\,\frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}}{2\,\mathfrak{Im}(\mathfrak{C}_k\,\mathfrak{D})} \cdot \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}}. \tag{31}$$

Schließlich wünscht man im Diagramm noch eine einfache Konstruktion zu haben, die zu jedem v das zugehörige $\mathfrak{Z}$ ergibt. Auch dies läßt sich einfach erreichen[1]). Da jeder Kreis als durch die Inversion einer Geraden entstanden gedacht werden kann, muß durch Verschiebung des Koordinatenursprungs immer eine Form möglich sein, wie folgende Gleichung angibt:

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{A}\,v + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\,v + \mathfrak{D}} = \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{C}\,v + \mathfrak{D}} \tag{32}$$

$\mathfrak{E}$ ist der Vektor der Verschiebung des Koordinatenursprungs, $|\mathfrak{a}|$ die Inversionspotenz bei der Inversierung der Geraden $\mathfrak{C}\,v + \mathfrak{D}$ in bezug auf diesen neuen Ursprung. Dabei müssen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{a}$ von v unabhängig sein. Aus (32) folgt

$$\mathfrak{A}\,v + \mathfrak{B} = \mathfrak{E}(\mathfrak{C}\,v + \mathfrak{D}) + \mathfrak{a}. \tag{33}$$

Den obigen Bedingungen kann man Genüge leisten durch

$$\mathfrak{A}\,v = \mathfrak{E}\,\mathfrak{C}\,v, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{D} + \mathfrak{a}, \tag{34}$$

woraus folgt

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{Z}_\infty. \tag{35}$$

und

[1]) Siehe auch Bloch, S. 44.

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{B} - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathfrak{Z}_k - \mathfrak{Z}_0). \tag{36}$$

Durch $\mathfrak{C}$ ist der Pol bestimmt, von dem aus die Gerade $\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}$ inversiert wird. Da mit der Inversion stets eine Spiegelung verbunden ist, wird man gleich die an der reellen Achse gespiegelte Gerade $\mathfrak{C}_k v + \mathfrak{D}_k$ in bezug auf den neuen Ursprung $\mathfrak{C}$ einzeichnen, damit entsprechende Punkte auf Strahlen durch den Endpunkt von $\mathfrak{C}$ liegen. Aus (36) ersieht man, daß allgemein zu der Inversion auch noch eine Drehung hinzukommt, die durch das Argument von $\mathfrak{a}$ bestimmt ist. Im Diagramm kann man sie von vornherein berücksichtigen, indem man die gespiegelte Gerade um den Winkel χ nach vorwärts dreht, wenn χ das Argument von $\mathfrak{a}$ bedeutet. Auf der Geraden gilt in bekannter Weise der lineare Maßstab für v. Man kann entweder die Gerade $\mathfrak{C}v + \mathfrak{D}$ mit Spiegelung und Drehung maßstäblich einzeichnen, oder man zieht sie in der vorgeschriebenen Richtung durch einen beliebigen Punkt des Kreises, z. B. $\mathfrak{Z}_k$ und bestimmt einen zweiten Punkt durch numerische Ausrechnung und Inversion aus dem Kreise. Durch die beiden Punkte auf der Geraden ist dann die Maßstabsskala für v festgelegt. Verlust- und Leistungsdarstellung ergeben sich dann aus dem Diagramm in bekannter Weise (s. z. B. Le Cocq, Rév. Gén. d'El. 85, 483, 1921, A. Blendel, Rév. G. E. 6, 1921).

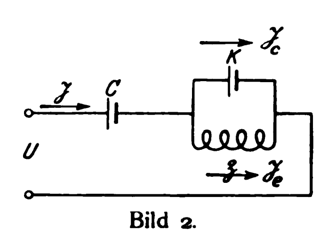


Bild 2.

Beispiel.

Als Beispiel wähle ich den von Petersen, ETZ. 1916, S. 129 angegebenen Stromkreis, Bild 2. Nach dem Bild ergibt sich in bekannter Weise

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{U}\,\omega C \frac{j\omega k \mathfrak{Z} + 1}{\omega \mathfrak{Z}(k + C) - j},$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{U}' \cdot \frac{j\omega k \mathfrak{Z} + 1}{\omega \mathfrak{Z} k \alpha - j},$$

wo

$$\alpha = \frac{k + C}{k} \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}' = \mathfrak{U}\,\omega C.$$

$\mathfrak{Z} = z e^{j\psi}$ möge sich nur in seiner Größe, aber nicht in seiner Phase ändern. Dann wird

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{U}' \cdot \frac{j\omega k e^{j\psi} z + 1}{\omega e^{j\psi} k \alpha z - j}.$$

$$z = 0. \qquad \mathfrak{J}_k = \mathfrak{U}' j.$$

$$z = \infty. \qquad \mathfrak{J}_0 = \mathfrak{U}' \cdot \frac{j}{\alpha}.$$

I. Der Peripheriewinkel über der Sehne $\mathfrak{J}_0 \mathfrak{J}_k$.

Nach Gleichung (4) ist

$$\frac{\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_k}{\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0} = -\frac{z\,\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}} = -j\omega k \alpha z e^{j\psi},$$

$$= \omega k \alpha z e^{-j\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)}.$$

Der Argumentwinkel ist spitz und negativ. Der größere Teil des Kreises ist das Arbeitsgebiet ($z = 0$ bis $z = +\infty$). $\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_k$ eilt gegen $(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0)$ nach. Da J_k und $\mathfrak{J}_0$ gleichphasig sind und $|\mathfrak{J}_k| > |\mathfrak{J}_0|$, wird der Kreis von $\mathfrak{J}_k$ ausgehend im negativen Drehsinn durchlaufen. Der Zentriwinkel ist dann $\pi - 2\psi$ und die der Sehne anliegenden Winkel der Radien nach dem Mittelpunkt haben die Größe ψ (s. Bild 3).

II. Der Kreisradius.

Entsprechend Gleichung (1) haben wir

$$\mathfrak{A} = j\,\omega\,k\,e^{j\psi}\cdot\mathfrak{U}'. \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{U}'.$$

$$\mathfrak{C} = \omega\,k\,\alpha\,e^{j\psi}. \qquad \mathfrak{D} = -j.$$

$$\mathfrak{C}_k = \omega\,k\,\alpha\,e^{-j\psi}. \qquad \mathfrak{C}_k\cdot\mathfrak{D} = -j\,\omega\,k\,\alpha\,e^{-j\psi}.$$

$$\mathfrak{Im}\,(\mathfrak{C}_k\,\mathfrak{D}) = -\omega\,k\,\alpha\cos\psi.$$

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C} = \mathfrak{U}'\,(\omega\,k\,e^{j\psi} - \omega\,k\,\alpha\,e^{j\psi}) = -\omega\,k\,(\alpha - 1)\,e^{j\psi}\cdot\mathfrak{U}'.$$

$$|\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}| = \omega\,k\,(\alpha - 1)\,U'.$$

$$\frac{1}{R} = \frac{2}{\omega\,k\,(\alpha - 1)\,U'}\cdot(-\omega\,k\,\alpha\cos\psi) = -\frac{2\,\alpha}{(\alpha - 1)\,U'}\cos\psi.$$

$$\underline{R = -U'\cdot\frac{\alpha - 1}{2\,\alpha}\,\frac{1}{\cos\psi}.}$$

R wird negativ, d. h. der Kreis wird im Sinne wachsender v im negativen Drehsinn durchlaufen.

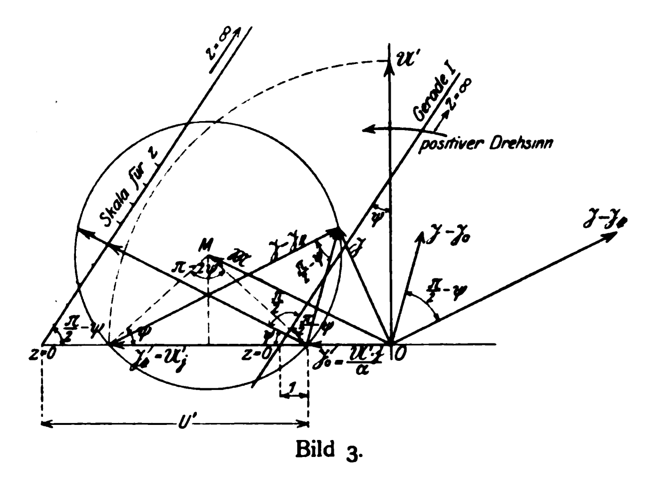


Bild 3.

III. Der Radiusvektor nach dem Kreismittelpunkt.

$$z = 0. \qquad \mathfrak{J}_k = \mathfrak{U}'\,j. \qquad \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} = j\,\mathfrak{U}'.$$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{U}'\,j + j\,\frac{\omega\,k\,(\alpha - 1)\,e^{j\psi}\,\mathfrak{U}'}{-2\,\omega\,k\,\alpha\cos\psi} = j\,\mathfrak{U}' - j\,\frac{\alpha - 1}{2\,\alpha\cos\psi}(\cos\psi + j\sin\psi)\,\mathfrak{U}'.$$

$$\mathfrak{M} = j\left(1 - \frac{\alpha - 1}{2\,\alpha}\right)\mathfrak{U}' + \frac{\alpha - 1}{2\,\alpha}\,\mathrm{tg}\,\psi\cdot\mathfrak{U}'.$$

$$\underline{\mathfrak{M} = \mathfrak{U}'\,\frac{\alpha + 1}{2\,\alpha}\,j + \frac{\alpha - 1}{2\,\alpha}\,\mathfrak{U}'\cdot\mathrm{tg}\,\psi.}$$

Damit ist der Kreismittelpunkt in seinen Koordinaten festgelegt.

IV. Skala für v.

$$\underline{\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{C}} = \mathfrak{J}_0 = j\,\frac{\mathfrak{U}'}{\alpha}.}$$

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{U}' - \frac{\mathfrak{U}'}{\alpha} = \underline{\mathfrak{U}'\,\frac{\alpha - 1}{\alpha}.}$$

Das Inversionszentrum ist wie immer der Leerlaufstrom. Die Inversionspotenz ist reell, wenn wir $\mathfrak{U}'$ als reellen Bezugsvektor wählen. Die zu inversierende Gerade hat die Gleichung

$$\mathfrak{C} z + \mathfrak{D} = \omega k \alpha e^{j\psi} z - j.$$

Sie schließt den Winkel ψ mit der reellen Ordinatenachse ein. Ihr Spiegelbild ist unter dem Winkel $\frac{\pi}{2} - \psi$ gegen die Abszissenachse geneigt. Dessen Gleichung ist

$$\omega k \alpha e^{-j\psi} z + j$$

(s. Bild 3, Gerade I). Liegt sie zur Konstruktion ungünstig, so kann man etwa die Gerade $\mathfrak{U}' \omega k \alpha e^{-j\psi} z + \mathfrak{U}' j$ (s. Bild 3) wählen und auf dieser die Werte für $z = 1, 2, 3$ usf. auftragen. Die Inversionspotenz wird dann $U'^2 \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

Zusatz: Wie mir Herr Professor P. Koebe freundlichst mitteilt, lassen sich Mittelpunkt und Radius des Kreises nach den allgemeinen Gesetzen der konformen Abbildung sehr einfach bestimmen. Faßt man v als komplexe Variable auf, so entspricht dem Punkte $v = -\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}$ der unendlich ferne Punkt von $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z} = \infty$. Der konjugierte Wert v_k geht nun nach den Gesetzen der konformen Abbildung in den Kreismittelpunkt über. Es wird also

$$\mathfrak{M} = \frac{-\mathfrak{A}\frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{C}_k} + \mathfrak{B}}{-\mathfrak{C}\frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{C}_k} + \mathfrak{D}} = \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_k - \mathfrak{A}\,\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_k}. \tag{37}$$

Diese Formel geht in (31) über, wenn man berücksichtigt, daß

$$\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_k = 2j\,\mathfrak{Im}(\mathfrak{C}_k\,\mathfrak{D}) = -2j\,\mathfrak{Im}(\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_k)$$

ist. Der Kreisradius ergibt sich dann durch den Abstand $\mathfrak{Z}_k - \mathfrak{M}$ (s. S. 143, oben):

$$R = \left| \frac{\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}_k - \mathfrak{A}\,\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_k} - \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}} \right|$$

$$R = \left| -\frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\,\mathfrak{C}}{\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_k} \right| \cdot \left| \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}} \right|. \tag{38}$$

Da

$$\left| \frac{\mathfrak{D}_k}{\mathfrak{D}} \right| = 1$$

ist, und

$$|\mathfrak{D}\,\mathfrak{C}_k - \mathfrak{C}\,\mathfrak{D}_k| = 2\,|\mathfrak{Im}(\mathfrak{C}_k\,\mathfrak{D})|$$

ergibt sich daraus Gleichung (26), wenn man vom Vorzeichen absieht.

Der Kurzschlußstrom eines Wechselstromgenerators.

Von

W. Rogowski.

(Mitteilung aus dem Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Aachen.)

Ziel. Über den Stromstoß bei Kurzschluß eines Wechselstromgenerators sind wir hinreichend unterrichtet. Wir kennen die Höhe der ersten Stromspitze. Auch wissen wir genügend genau, mit welcher Geschwindigkeit die aufeinanderfolgenden Stromspitzen abnehmen. Ich brauche hier nur auf die wertvollen Arbeiten von Biermanns und Dreyfus hinzuweisen [1] [2]. Wenn ich trotzdem das Wort ergreife, so geschieht es deshalb, weil ich eine einfache und durchsichtige Rechnung mitteilen möchte. Die bisherigen Bearbeiter haben ihre Untersuchung so angelegt, daß möglichst viele Einzelheiten im Verlauf des Kurzschlußstromes herausgearbeitet werden. Dafür ist ihnen das Interesse und der Dank aller derer sicher, die sich eingehend von Berufs wegen mit solchen Kurzschlußvorgängen befassen müssen. Im Gegensatz hierzu will ich im folgenden durch weitgehende Vernachlässigungen möglichst Einzelheiten abstreifen, um so den nackten Kern des Kurzschlußproblems bloßzulegen. Ich suchte nach einer solchen Behandlung, als ich meinen Studenten das Zustandekommen der ungewöhnlichen Kurzschlußströme klar machen wollte. Die vorliegende Mitteilung ist aber vielleicht auch diesem oder jenem Fachmanne nicht unwillkommen. Denn sie bildet meines Erachtens eine Vorstufe, von der aus die Arbeiten von Biermanns und Dreyfus erst richtig gewürdigt und genossen werden können. Ich bin weit davon entfernt, die Bedeutung solcher aus pädagogischen Gründen durchgeführten Rechnungen zu überschätzen. Man soll sie aber auch nicht unterschätzen.

Der Gedanke, der der folgenden Rechnung zugrunde liegt, besteht darin, den Widerstand in Stator und Rotor zu erster Näherung gleich Null zu setzen. Hiermit lassen sich dann sofort (S. 149) die entstehenden Kurzschlußströme niederschreiben. Natürlich ergeben sich so zeitlich ungedämpfte Werte.

Wollen wir über die Art des Abklingens etwas erfahren, so müssen wir die Widerstände doch berücksichtigen. Aber die mit den Widerständen R_1 und R_2 behafteten Spannungsabfälle $R_1 i_1$ und $R_2 i_2$ sind dann nur noch Berichtigungsgrößen. Es genügt, wenigstens für den Anfang des Kurzschlußvorganges, für die Ströme i_1 und i_2 in der Feld- und Statorspule die aus der ersten Näherung bekannten Werte einzusetzen. Eine einfache Integration führt bei diesem Wege zu der zweiten Näherung, die auch die wesentlichen Eigentümlichkeiten der Dämpfung aufdeckt.

Ein einfaches Beispiel möge den Weg beleuchten: Es werde ein Element (elektromotorische Kraft E) an eine mit Widerstand (R) und Selbstinduktion (L) behaftete Spule geschaltet. Der Einschaltvorgang wird bekanntlich durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

---

[1] Biermanns, Magnetische Ausgleichsvorgänge in elektrischen Maschinen, Springer 1919, S. 48.

[2] Dreyfus, Arch. f. Elektrotechnik, V, S. 103.

$$L\frac{di}{dt} + iR = E. \tag{1}$$

Setzen wir in erster Näherung $R = 0$; so ist

$$L\frac{di}{dt} = E; \qquad i = \frac{E}{L}t. \tag{2}$$

Wird in zweiter Annäherung R als klein angenommen, so ergibt sich:

$$L\frac{di}{dt} = E\left[1 - \frac{R}{L}t\right]. \tag{3}$$

$$i = \frac{E}{L}t\left[1 - \frac{R}{2L}t\right] \tag{4}$$

Entwickelt man in der bekannten strengen Lösung von (1)

$$i = \frac{E}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right] \tag{5}$$

die Exponentialfunktion, so erhält man, wenn man nach dem zweiten Gliede die Entwicklung abbricht, genau den in (4) angegebenen Wert. Genügt dieser Grad der Genauigkeit, so leitet man die Näherungslösung (4) am besten, wie wir es getan haben, unmittelbar aus der Differentialgleichung ab und nicht, was ja auch möglich wäre, aus der strengen Lösung.

Genau das Entsprechende werden wir nun bei dem sehr viel schwierigeren Problem des Kurzschlusses eines Wechselstromgenerators durchführen, bei dem die strenge Lösung bisher nicht bekannt ist[1]).

Der Kurzschluß in erster Hauptstellung.

a) Vernachlässigung der Widerstände. Die Feldspule unseres zunächst leerlaufenden Wechselstromgenerators habe keinen Widerstand. Es fließe in ihr der Strom i_0. Unter diesen Umständen benötigen wir zu seiner Aufrechterhaltung keiner EMK. Solange die Statorspule geöffnet bleibt, ist der Erregerstrom $i_1 = i_0$ unveränderlich. Das erzeugte Magnetfeld läuft um. Der Fluß der Statorspule $M i_0$ (M = Gegeninduktivität) schwankt auf und nieder und ruft hierdurch die bekannten Wechselspannungen bei Leerlauf hervor. Legen wir die durch Bild 1 festgehaltene Lage von Stator und Feldspule (erste Hauptlage) als Anfangslage fest und charakterisieren wir irgendeine andere Lage durch den Drehwinkel α, so können wir schreiben:

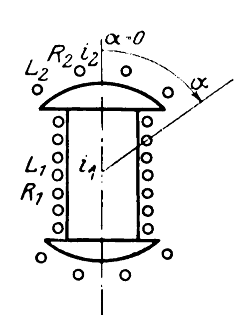


Bild 1. Stellung von Statorspule und Polrad in erster Hauptlage

$$M = M_0 \sin\alpha \tag{6}$$

(M_0 = Gegeninduktivität in erster Hauptlage s. Bild 1). Die erste Hauptlage entspreche der Zeit $t = 0$. Es ist somit

$$\alpha = \omega t. \tag{7}$$

Im Augenblick $t = 0$ werde nun die Statorspule kurz geschlossen. Da ihr kein Widerstand zukommen sollte, so muß sie von nun an den Fluß, den sie im Kurzschlußmoment hatte, dauernd beibehalten; denn ihr Ohmscher Spannungsabfall ist Null

[1]) Die genaue Lösung ist nur bekannt für den Fall $\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2}$ also gleicher Zeitkonstanten der Feld- und Statorspule, s. Biermanns, a. a. O.



und nach dem Induktionsgesetz ergänzen sich die Flußänderungen $\frac{d\,\Phi_2}{dt}$ und Ohmscher Spannungen $i_2 R_2$ zu Null:

$$\frac{d\,\Phi_2}{dt} = 0. \tag{8}$$

Im Augenblick des Kurzschlusses ist aber $\Phi_2 = 0$; folglich behält die Statorspule auch nach dem Kurzschluß den Fluß

$$\Phi_2 = 0 \tag{9}$$

bei.

Die gleiche Überlegung führen wir für die Feldspule durch. Auch sie soll keinen Widerstand haben. Im Kurzschlußmomente ist ihr Fluß



$$\Phi_1 = L_1 i_0 \tag{10}$$

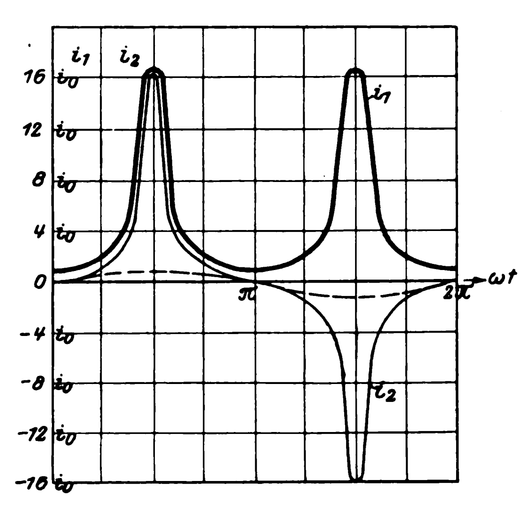


Bild 2. Stark ausgesogen: Plötzlicher Kurzschlußstrom der Erregerwicklung.
Dünn ausgesogen: Plötzlicher Kurzschlußstrom der Statorspule.
Gestrichelt: Stationärer Kurzschlußstrom.

(L_1 Eigeninduktivität der Erregerspule). Nach dem Kurzschluß ist aus dem oben angeführten Grunde für alle späteren Zeiten ebenfalls

$$\Phi_1 = L_1 i_0. \tag{11}$$

Nun ist durch Eigen- und Gegeninduktivitäten ausgedrückt:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 i_0. \tag{12}$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = 0 \tag{13}$$

hieraus folgt sofort:

$$i_2 = -\frac{M i_1}{L_2}. \tag{14}$$

$$i_1 \cdot \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right) = i_0, \tag{15}$$

$$i_1 = \frac{i_0}{1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}} \tag{16}$$

und mit Rücksicht auf (6) und (7)

$$i_1 = \frac{i_0}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} \tag{17}$$

$$i_2 = - \frac{M_0}{L_2} \cdot \frac{i_0 \sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t}. \tag{18}$$

Die Stromspitze in der Feldspule übertrifft den stationären Feldstrom um das $\frac{1}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}}$, also um das τfache, wo $\tau = 1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}$ den Streukoeffizienten bezeichnet. Und zwar gilt dieses für jede Frequenz. In demselben Verhältnis stehen auch bei der Statorspule die Amplituden des plötzlichen und des stationären Kurzschlußstromes[1]) (letzterer hat rund den Wert $i_2{}^s = \frac{M_0}{L_2} i_0 \sin \omega t$). In Bild 2 sind stationärer und plötzlicher Kurzschlußstrom für einen Generator mit dem Streukoeffizienten $\tau = 0{,}06$ gezeichnet.

b) Angenäherte Berücksichtigung der Widerstände. Wir nehmen jetzt die Widerstände von Null verschieden an, setzen sie aber als klein voraus. Dann ändert sich nach Vornahme des Kurzschlusses der Fluß der Erregerspule nach folgender Vorschrift:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} + i_1 R_1 = E. \tag{19}$$

E bedeutet die Gleichspannung an der Erregerspule. Sie ist offenbar gleich $R_1 i_0$:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = -(i_1 - i_0) R_1. \tag{20}$$

Entsprechend liegt der Schlüssel für die Vorgänge in der Statorspule in der Beziehung:

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = - i_2 R_2. \tag{21}$$

Wenn R_1 und R_2 gleich Null sind, dann gelten die Ausdrücke (17) und (18) genau für die plötzlichen Kurzschlußströme. Sind die Widerstände nicht gleich Null, sondern nur klein, so werden (17) und (18) für die auf den Kurzschluß folgende Zeit zwar nicht genau aber doch sehr angenähert gelten. Hält man dies im Auge, dann wird man zugeben müssen, daß uns die rechten Seiten der Gleichungen (20) und (21) angenähert bekannt sind und die Werte:

$$-R_1 i_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} - 1 \right] \quad \text{und} \quad R_2 i_0 \frac{M_0}{L_2} \frac{\sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t}$$

haben. Nun ist i_2 eine periodische Größe, abwechselnd positiv und negativ. Glei-

[1]) s. v. Seite.



chung (21) sagt somit aus, daß der Statorfluß um den Wert Null herumpendelt[1]). Von diesen bald positiven bald negativen Änderungen kann man absehen, wenn es einem nur auf den Durchschnittswert ankommt. Wir schreiben somit:

$$\frac{d\Phi_2}{dt} = 0. \tag{22}$$

Anders liegt der Fall bei der Feldspule. Der Strom $(i_1 - i_0)$ ist dauernd positiv. Er schwankt kräftig und diese Schwankungen geschehen um den Mittelwert:

$$i_0 \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} - 1 \right) \tag{23}$$

oder angenähert

$$\frac{i_0}{\sqrt{\tau}}. \tag{24}$$

Es folgt nun:

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = - R_1 \frac{i_0}{\sqrt{\tau}}. \tag{25}$$

(26)

Setzen wir für die Flüsse die Werte (12) und (13), so ergibt sich:

$$L_1 i_1 + M i_2 = - R_1 \frac{i_0}{\sqrt{\tau}} \cdot t + L_1 i_0. \tag{27}$$

$$L_2 i_2 + M i_1 = 0. \tag{28}$$

---

[1]) Es ist:

$$\int \frac{\sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} dt = - \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau (1 - \tau)}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \tau}{\tau}} \right) \cos \omega t$$

$$\int \frac{1}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} dt = \frac{1}{\omega \sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} (\sqrt{\tau} \operatorname{tg} \omega t)$$

$$\tau = 1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}.$$

Diese Funktionen sind in ihrem Verlaufe aus Bild 3 ersichtlich.

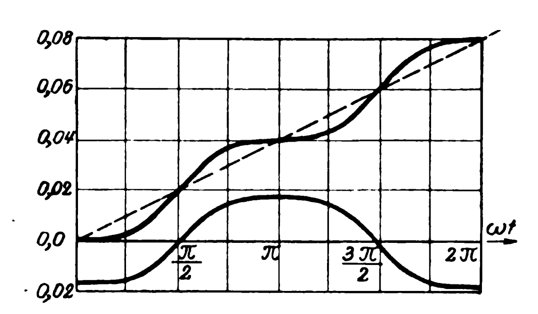


Bild 3. Obere Kurve: $f(t) = \frac{1}{\omega \sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \sqrt{\tau} \operatorname{tg} \omega t$

Gestrichelte Linie: $f(t) = \frac{t}{\sqrt{\tau}}$.

Untere Kurve: $F(t) = - \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau (1 - \tau)}} \cdot \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \tau}{\tau}} \cos \omega t$;

$= 314$ per/sec; $\tau = 0{,}06$.

Und hieraus folgt:

$$i_1 = \frac{i_0}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} \cdot \left[1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{\tau}} t\right]. \tag{29}$$

$$i_2 = -\frac{M_0}{L_2} \frac{i_0 \sin \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \sin^2 \omega t} \cdot \left[1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{\tau}} t\right]. \tag{30}$$

Wir sehen somit aus den eckigen Klammern der gewonnenen Ausdrücke (29) und (30), daß bei Kurzschluß in der ersten Hauptlage für die Dämpfung der Kurzschlußströme im wesentlichen Widerstand und Streuinduktivität der Erregerspule maßgebend sind.

Zweite Hauptlage.

Wir wollen jetzt die gleichen Betrachtungen für die zweite Hauptlage (Bild 4) durchführen, in der die Kurzschlußströme bekanntlich am stärksten ausfallen. Die Vorzugsrichtung von α falle mit der Polradstellung in der zweiten Hauptlage zusammen:

$$M = M_0 \cos \alpha. \tag{31}$$

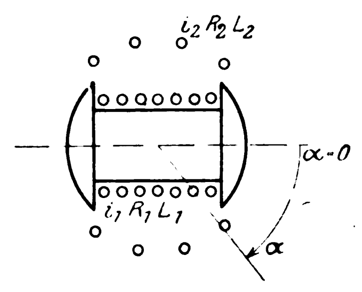


Bild 4. Stellung von Statorspule und Polrad in zweiter Hauptlage.

Soll der Kurzschluß bei der neuen Zählweise ebenfalls mit $t = 0$ beginnen, so müssen wir wieder

$$\alpha = \omega t \tag{32}$$

setzen. Der Fluß der Statorspule ist im Kurzschlußmoment: $M_0 i_0$. Beim Widerstand Null gelten daher die Beziehungen:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = L_1 i_0. \tag{33}$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = M_0 i_0. \tag{34}$$

Hieraus folgt:

$$i_2 = \frac{M_0 i_0}{L_2} - \frac{M i_1}{L_2}, \tag{35}$$

$$i_1 = i_0 \frac{\left[1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos \omega t\right]}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t}, \tag{36}$$

$$i_2 = i_0 \frac{M_0}{L_2} \frac{[1 - \cos \omega t]}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t}. \tag{37}$$

Die Kurzschlußströme i_1 und i_2 fallen am größten aus, wenn $\cos \omega t = -1$ wird; sie erreichen dann die Werte:

$$i_{1\,max} = i_0 \frac{\left[1 + \frac{M_0^2}{L_1 L_2}\right]}{\tau}, \tag{38}$$

$$i_{2\,max} = i_0 \frac{M_0}{L_2} \cdot \frac{2}{\tau}, \qquad \tau = 1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2}. \tag{39}$$

Der Strom der Erregerspule wird angenähert, der Strom der Statorspule genau doppelt so groß wie bei Kurzschluß in der ersten Hauptlage.

Berücksichtigung der Widerstände. Für die Abdämpfung der Stromspitzen ist jetzt zu beachten, daß beide Ströme i_1 wie i_2 [Ausdruck (30) und (37)] dauernd positiv sind. Berechnen wir die Mittelwerte, so ergibt sich[1]:

$$i_{1\,m} = \lambda_1 i_0; \qquad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{\tau}}, \tag{40}$$

$$i_{2\,m} = \lambda_2 i_0; \qquad \lambda_2 = \frac{M_0}{L_2} \frac{1}{\sqrt{\tau}}. \tag{41}$$

Mit wachsender Zeit muß somit nach den Beziehungen (20) und (21) sowohl der Fluß der Stator- wie der Erregerspule absinken. Wir haben somit:

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = i_0 \left[L_1 \quad R_1 \frac{t}{\sqrt{\tau}}\right]. \tag{42}$$

$$\Phi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = i_0 \left[M_0 - R_2 \frac{M_0}{L_2} \frac{t}{\sqrt{\tau}}\right]. \tag{43}$$

Der schulgerechte Weg ergibt nun:

$$i_1 = i_0 \frac{\left[\left\{1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{\tau}} t\right\} - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos \omega t \left[1 - \frac{R_2 t}{L_2 \sqrt{\tau}}\right]\right]}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t}. \tag{45}$$

---

[1]) $$\int \frac{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t} dt = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \omega t}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \sin \omega t.$$

$$\int \frac{1 - \cos \omega t}{1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t} dt = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \omega t}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{\tau (1-\tau)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \sin \omega t.$$

Vgl. auch Bild 5.

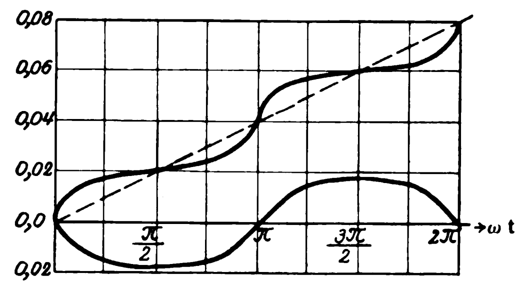


Bild 5. Obere Kurve: $f(t) = \frac{1}{\omega \sqrt{\tau}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \omega t}{\sqrt{\tau}}$,

Gestrichelte Linie: $f(t) = \frac{t}{\sqrt{\tau}}$,

Untere Kurve: $F(t) = -\frac{\sqrt{1-\tau}}{\tau} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\tau}{\tau}} \sin \omega t$.

$$i_2 = - i_0 \frac{M_0 \left[\left\{ 1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{\tau}} t \right\} \cos \omega t - \left\{ 1 - \frac{R_2 t}{L_2 \sqrt{\tau}} \right\} \right]}{L_2 \left[1 - \frac{M_0^2}{L_1 L_2} \cos^2 \omega t \right]}. \qquad (46)$$

Die ersten Summanden in den großen eckigen Klammern entsprechen den auch in der ersten Hauptlage vorhandenen Kurzschlußströmen. Daß jetzt $\cos \omega t$ statt wie früher gefunden, $\sin \omega t$ steht, rührt von der anderen Festsetzung des Zeitpunktes her (vgl. S. 151). Diese Beiträge sind auch jetzt wieder in ihrer Dämpfung hauptsächlich durch den Erregerwiderstand und die Erregerstreuung bestimmt. Die zweiten Glieder sind Zusatzglieder, die dem Kurzschluß in zweiter Hauptlage eigentümlich sind. Sie sind von gleicher Größenordnung wie die ersten Glieder. Für ihre Dämpfung kommt hauptsächlich Widerstand und Streuung der Statorspule in Betracht.

Mit dem Vorgehenden wird das Wesentliche des Kurzschlußvorganges getroffen. Will man Feinheiten herausarbeiten, so wird man zunächst in Analogie zu den Ergebnissen (S. 148) und die Ausdrücke $\left(1 - \frac{R_1}{L_1 \sqrt{\tau}} t\right)$ und $\left(1 - \frac{R_2}{L_2 \sqrt{\tau}} t\right)$ durch die Exponentialfunktion

$$e^{-\frac{R_1}{L_1 \sqrt{\tau}} t} \quad \text{und} \quad e^{-\frac{R_2}{L_2 \sqrt{\tau}} t}$$

ersetzen. Auch ist es nicht notwendig sich in den Gleichungen (20) und (21) bei den rechten Seiten auf die Mittelwerte zu beschränken. Wir können die Integration unter Zugrundelegung der Werte (17) und (18) genau durchführen. Wir würden so zu ähnlichen Feinheiten kommen, die Biermanns in seiner strengen Lösung des besonderen Falles $\frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2}$ beschrieben hat. Doch soll hiervon abgesehen werden. Im übrigen kann ich auf die Arbeiten von Biermanns und Dreyfus verweisen.

Archiv für Elektrotechnik

XI. Band. 5. Heft 1922.

Die Berechnung von eisenlosen Drosselspulen.

Von

Hans Hemmeter, Breslau.

I.

Einleitung. Induktionskoeffizienten gehören zu der Gruppe physikalischer Erscheinungen (Kraft-, Strömungsfelder), deren Behandlung mit den heutigen Mitteln der Mathematik nur in den allereinfachsten Fällen möglich ist. Vielleicht bedarf es dazu eines ganz neuen „Kalküls", so wie für das Problem der Bewegung eines Punktes der Differentialbegriff nötig war. Bei der Häufigkeit, mit der Induktionskoeffizienten in der Anwendung auftreten, ist die Schwierigkeit ihrer Berechnung oft recht hinderlich.

Ziel der vorliegenden Arbeit. In dieser und einer noch folgenden Arbeit wird näherungsweise eines dieser Probleme, nämlich die Berechnung von eisenlosen Drosselspulen von Kreisringform mit rechteckigem Wicklungsraum (Bild 1 zeigt einen Meridianquerschnitt) mit einer Genauigkeit und in einem Umfang zum Abschluß gebracht, die für die Praxis ausreichen. Spulen von anderer Form sind wohl selten; die behandelte ist auch die einzige, die bisher in zahlreichen Arbeiten in Angriff genommen worden ist. Die bisher erschienenen Formeln und Rechnungen gelten aber nach den dabei gemachten Annahmen oder nach Angabe ihrer Autoren nur für Spezialfälle (eine der Seiten des Rechtecks $b \times c$ null oder klein oder beide klein). Ohne unnötigen Verbrauch von Leitermaterial haben solche Spulen nur kleine Selbstinduktionen, praktisch brauchbare wohl nicht mehr als 0,1 Henry. Eine große Selbstinduktion erfordert eine große Anzahl von Windungen, damit wächst der Wicklungsraum, und zwar bei der günstigsten Spulenform radial und axial und die vorhandenen Formeln gelten nicht mehr. In dieser Arbeit wird die Berechnungsmöglichkeit ausgedehnt auf Spulen, bei denen $\frac{b}{2\,a_0} = 0{,}6$; $\frac{c}{2\,a_0} = 0{,}6$ ist, mit einem maximalen Fehler von 0,5% bei den größten Dimensionen.

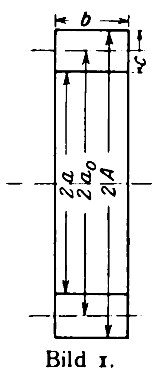


Bild 1.

$\frac{c}{2a_0}$ kann höchstens = eins werden, wie Bild 1 erkennen läßt. Solche Spulen kommen sicher nicht vor. Auch das Verhältnis $\frac{c}{2\,a_0} = 0{,}6$ dürfte selten sein. Längere Spulen als die angegebenen sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Literatur. Das Problem hat eine Geschichte. Es wäre wohl längst gelöst, wenn es noch dieselbe Wichtigkeit hätte wie vor 40 Jahren. Damals war die genaue Kenntnis der Induktivität einer Rolle nötig für eine Methode zur Bestimmung des absoluten Ohm, und es bemühten sich Physiker wie Maxwell, Lord Rayleigh, Kirchhoff, H. Weber und andere um die Lösung. Maxwell behandelt in seinem Lehrbuch, Bd. II, S. 398—434 die Grundlagen zur Berechnung. Er stellte auch für den allgemeinen Fall: b und c von null verschieden die erste Formel auf, die aber bald angezweifelt wurde, da sie die Spezialfälle $b = 0$ oder $c = 0$ nicht in

sich begriff, die leicht direkt berechnet werden konnten. Nachrechnungen waren zunächst erfolglos. Die erste Formel, die den Sonderfällen genügte, war von Stefan (zuerst veröffentlicht in „Wiener Berichte" 1883, 88 (2), S. 1201, dann „Ann. d. Phys." 1884, 258, S. 107). Eine zweite erschien von Weinstein (Ann. d. Phys., 1884, 257, S. 329). Beide Male ist nur das Resultat, nicht die Ableitung angegeben, wohl weil sie zu umfangreich ist. Beide Formeln sind äußerlich zwar voneinander verschieden, lassen sich aber ineinander überführen. Doch ist es unrichtig, wenn in der Literatur die Stefansche nur eine Umformung der Weinsteinschen genannt wird; sie war ja zuerst erschienen. Beide Arbeiten sind zweifellos unabhängig voneinander entstanden.

Von den zahlreichen sonst vorhandenen Formeln und Berechnungen mögen nur folgende angeführt werden, auf die wir später zurückkommen:

Strasser (Annalen der Physik, 1905, 17, S. 763), Zylinderspulen mit wenigen Windungen in einer Lage.

Esau (Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph., 1911, 5, S. 212 und 378; 1920, 15, S. 1), Flachspulen und Zylinderspulen mit wenigen Windungen in einer Lage. Spulen mit wenigen Windungen in mehreren Lagen.

Emde (Elektrotechnik und Maschinenbau, 1912, S. 221 ff.) hat den unendlich dünnwandigen Zylinder,

Spielrein (Archiv für Elektrotechnik, 1915, 3, S. 187) die unendlich dünne Kreisringscheibe exakt und allgemein berechnet und das Resultat in Tabellen zusammengestellt.

Ausführliches über das Problem findet sich bei G. Glage (Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph., 1908, 2, S. 361 ff.),

ferner bei Coffin und Rosa (Bull. of the Bur. of Standards, 1906, 2, S. 113 und 366),

endlich auch bei Orlich, Kapazität und Induktivität, S. 76 ff.

Durchführung der vorliegenden Lösung. Dieser Arbeit ging eine andere voraus, deren Veröffentlichung sich mit der gegenwärtigen erübrigt. Der Verfasser hatte ursprünglich die Absicht, ausgehend von einer Grundspule mit kleinen Dimensionen des Rechtecks, die genau berechnet werden mußte, durch ein Näherungsverfahren sukzessive größere zu bestimmen und die Resultate in einer Tabelle zusammenzustellen. Für die Berechnung dieser Grundspule ist von den vorhandenen Formeln höchstens die von Stefan oder Weinstein geeignet. Die erstere ist handlicher, da Stefan zwei Tabellen mit veröffentlicht hat, die die Benützung erleichtern. Wir werden freilich später sehen, daß die eine Tabelle unvollständig ist, weil sie nur gilt, wenn b größer als c ist. Für den Fall b kleiner als c muß eine Änderung an der Formel angebracht und die genannte Tabelle erweitert werden. Beide Formeln gelten zunächst nur, wenn der Draht rechteckigen Querschnitt hat und die Isolation unendlich dünn ist. Stefan gibt daher noch ein Korrekturglied an, das auf den kreisrunden Drahtquerschnitt und die Isolation Rücksicht nimmt, so daß man also ein Hauptglied und dies Korrekturglied hat. Diese Zerlegung ist notwendig und schon von Maxwell vorgeschlagen, um die Lösung mit Hilfe einer (vierfachen) Integration zu ermöglichen. Der Integrand ist dabei eine unendliche Reihe, die nach den Gliedern zweiten Grades abgebrochen ist. Nach den Angaben von Stefan ist nun das Hauptglied richtig, wenn $\frac{b}{2\,a_0}$ und $\frac{c}{2\,a_0}$ klein sind. Eine nähere Erklärung fehlt und da $\frac{c}{2\,a_0}$ höchstens gleich eins werden kann, wird man schon bei $\frac{b}{2\,a_0} = \frac{c}{2\,a_0} = 0{,}2$ im Zweifel über die Genauigkeit sein. Es mußte also



zunächst darüber eine Untersuchung angestellt werden, die zugleich Aufschluß gab über die Richtigkeit der Formel. Gegen diese hatte sich nämlich eine sehr gewichtige Stimme erhoben: P. Drude hatte an Hand von Versuchsmaterial mit Zylinderspulen mit wenigen Windungen in einer Lage Abweichungen zwischen der Rechnung nach Stefan und sehr genauen experimentellen Prüfungen bis zu 20% festgestellt (Ann. d. Phys. 1902, 9, S. 590).

Die Angaben von Drude wurden von Strasser übernommen, der daher für einlagige Zylinderspulen eine neue Formel aufstellte. Dem Beispiel Strassers ist Esau gefolgt und hat Formeln für Scheibenspulen und Spulen mit wenigen Lagen berechnet.

Alle drei Autoren schieben die angeblichen Fehler auf das Korrekturglied der Stefanschen Formel. Eine nähere Untersuchung zeigt aber, daß sie dort nicht liegen können; sie müßten also im Hauptglied stecken. Das wäre trotz der Übereinstimmung der Stefanschen und Weinsteinschen Rechnung nicht ausgeschlossen, wenn man an die fehlerhafte Rechnung Maxwells denkt. Die Schwierigkeit der Integration liegt in den Gliedern zweiten Grades. Die übrige Rechnung ist von vielen nachgeprüft worden.

Ein Versuch, die Integration neu — eine Ableitung ist ja nirgends angegeben — durchzuführen, wäre bei solchen Schwierigkeiten Selbstüberhebung gewesen. Der Verfasser schlug daher einen anderen Weg ein. Er wandte auf Spulen mit kleinen Dimensionen unter Umgehung der exakten Berechnung der Glieder zweiten Grades ein Näherungsverfahren an, nach Art der Simpsonschen Regel, das zwar ebenfalls umständlich war, sich aber Schritt für Schritt kontrollieren ließ und eine Genauigkeit bis auf 0,1% ermöglichte. Es zeigte sich, daß die Stefan-Weinsteinsche Rechnung richtig ist, und daß sie für größere Dimensionen genau ist, als die Autoren selbst angenommen hatten. In dieser Rechnung bestand die Vorarbeit zur vorliegenden.

Resultat der vorliegenden Arbeit. Der Verfasser prüfte nun die Rechnungen von Drude und Strasser und fand, daß zum Teil eine irrtümliche Auffassung von der Stefanschen Formel der Grund für die Abweichungen ist. Allerdings ergab sich auch die Unzulänglichkeit der einen oben erwähnten Tabelle. Berücksichtigt man dies, dann gibt die Stefansche Formel ebenso genaue Werte bei Spulen mit wenig Windungen wie die von Strasser und Esau. Letztere sind leicht nachzuprüfen und bilden daher eine wertvolle Stütze für die Stefansche. Die Schuld an diesen Irrtümern muß man aber billigerweise Stefan zuschieben, der keinerlei Erklärung über die Benützung seiner immerhin recht komplizierten Formel beifügt.

Der Verfasser nahm nun die Stefansche Formel zur Grundlage für seine Absicht, und das nächste Ziel war, den Gültigkeitsbereich festzustellen bzw. den maximalen Fehler. Dies geschah nach demselben Näherungsverfahren.

Das Resultat ist, daß die Formel selbst für Spulen mit $\frac{b}{2\,a_0} = \frac{c}{2\,a_0} = 0{,}6$ nur einen Fehler ergibt, der kleiner ist als 1,3% und mit abnehmenden Dimensionen rasch verschwindet. Durch Hinzunahme von Gliedern läßt sich dieser Fehler unter 0,5% herunterdrücken. Solche sind für längere Spulen $\left(\frac{b}{2\,a_0}\right.$ größer als $\left.0{,}6\right)$ nötig. Die Rechnungen darüber sind aber noch nicht abgeschlossen und sollen später veröffentlicht werden. Da die Formel für beliebig viele Windungen bis herab zu zweien gilt, ersetzt sie fast alle bisherigen und ist also eine allgemeine Lösung. Die ursprünglich beabsichtigte Lösungsmethode des Verfassers erübrigt sich.

Bemerkungen zur Rechnung. Das Resultat ist überraschend. Es wird verständlich, wenn man bedenkt, daß die Stefansche Formel entsteht aus der vierfachen Integration einer unendlichen Reihe. Das Restglied einer selbst schlecht konvergierenden Reihe wird durch sukzessive Integration immer kleiner, die Konvergenz des Integrals immer besser, und zwar werden bei Reihen mit zwei Veränderlichen die Koeffizienten der Glieder mit $x^m \cdot y^n$ besonders stark verkleinert.

Die Rechnung ist ohne Verwendung höherer Mittel geführt und natürlich sehr umfangreich und wenig elegant. Man hat, wenn man die langwierigen Ausdrücke (9 Zehntel der Rechnung sind hier unterdrückt) vor sich sieht und dann die numerischen Werte mit ihrer Kleinheit damit vergleicht, das Gefühl, als ob man genarrt wäre; ein Gefühl, das noch gesteigert wird, wenn man an die umfangreiche Literatur und die vielen Versuche, das Problem zu lösen, denkt. Tatsächlich ist es doch für viel mehr Fälle der Praxis, als man bisher annahm, seit Stefan gelöst.

Es sei gestattet, auf eine anscheinend neue Formel für die Berechnung der gegenseitigen Induktion zweier koaxialen, parallelen Kreisströme, die sehr rasch konvergiert, hinzuweisen.

Das Näherungsverfahren dürfte sich auch bei manchen anderen nicht exakt berechenbaren Problemen verwenden lassen.

II. Die Stefansche Formel.

Wie schon erwähnt, besteht diese aus einem Haupt- und einem Korrekturglied. Die Grundlagen für die Berechnung sind für beide von Maxwell.

Das Hauptglied. Dieses ist die Selbstinduktion einer Idealspule, die bewickelt ist mit n Windungen von rechteckigem Drahtquerschnitt bei unendlich dünner Isolation. Der Wicklungsraum ist also ganz mit Kupfer ausgefüllt, und die Selbstinduktion dieser Idealspule ist

$$n^2 \cdot L',$$

wo L' die Selbstinduktion des massiven Ringes ist. Sie muß zunächst bestimmt werden, und zwar durch eine vierfache Integration.

Dabei ist die Annahme gemacht, daß jede Windung in sich zurückläuft, d. h. in einer Ebene liegt. In Wirklichkeit gehen die einzelnen Windungen ineinander über, liegen also auf Schraubenflächen. Erst bei großen Ganghöhen, wie sie wohl nur bei einlagigen Zylinderspulen vorkommen, entstehen dadurch merkliche Fehler. Bei normalen Spulen sind die Winkel zwischen den einzelnen Stromelementen nicht wesentlich verschieden von denen, wenn jede Windung in einer Ebene liegt.

Die Selbstinduktion des massiven Ringes. Bei massiven Leitern sind die Induktionskoeffizienten von der Stromverteilung abhängig. In unserem Fall muß diese über den Querschnitt des Ringes dieselbe sein wie über den Wicklungsraum der Spule, d. h. gleichmäßig.

Dann ist die Selbstinduktion des Ringes gleich der doppelten elektromagnetischen Energie beim Gesamtstrom eins. Ist M die gegenseitige Energie zwischen zwei Stromfäden des Ringes mit den Elementarquerschnitten df_1 und df_2, dann ist

$$L' = \frac{1}{F^2} \int M \, df_1 \cdot df_2, \qquad (1)$$

wo das Integral über den Querschnitt des Ringes $F = b \cdot c$ zu nehmen ist. M ist von Maxwell angegeben zu

$$M = 4\pi a \left[\left(1 + \frac{y}{2a} + \frac{3x^2 + y^2}{16a^2} - \frac{3x^2y + y^3}{32a^3} \cdots \right) \ln \frac{8a}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \left(2 + \frac{y}{2a} + \frac{x^2 - 3y^2}{16a^2} - \frac{6x^2y - y^3}{48a^3} \cdots \right) \right]. \qquad (2)$$



M ist also die gegenseitige Induktion zweier parallelen, koaxialen, linearen Kreisströme, x der Abstand der beiden Kreisebenen, y der Unterschied der beiden Radien, a der kleinere der Radien, wenn y positiv ist (Bild 2). Von der Herleitung des Ausdrucks soll noch die Rede sein. Die beiden runden Klammern sind unendliche Reihen, über deren Restglied nichts bekannt ist.

Zur Integration müssen wir etwas anders schreiben: Wir legen ein Achsenkreuz parallel zu den Seiten b und c mit dem Nullpunkt im Mittelpunkt des Rechteckes, der den Radius a_0 habe (Bild 3). x, y seien die Koordinaten der Spur des einen Kreises, x', y' die des andern, dann geht für zwei beliebige Stromfäden des Ringes (2) über in

$$M = 4\pi(a_0 + y')\left[\left(1 + \frac{y - y'}{2(a_0 + y')} + \frac{3(x - x')^2 + (y - y')^2}{16(a_0 + y')^2} - \frac{3(x - x')^2(y - y') + (y - y')^3}{32(a_0 + y')^3} \ldots\right)\ln\frac{8(a_0 + y')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} - \left(2 + \frac{y - y'}{2(a_0 + y')} - \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(x - x')^2 - 3(y - y')^2}{16(a_0 + y')^2} - \frac{6(x - x')^2(y - y') - (y - y')^3}{48(a_c + y')^3} \ldots\right)\right]. \tag{3}$$

Man multipliziert mit $a_0 + y'$ aus, setzt $a_0 + y' = a_0\left(1 + \frac{y'}{a_0}\right)$ und entwickelt $\left(1 + \frac{y'}{a_0}\right)$ und $\frac{1}{1 + \frac{y'}{a_0}}$ in Reihen.

So erhält man schließlich, wenn man mit den Gliedern zweiten Grades abbricht,

$$M = 4\pi a_0\left[\left(1 + \frac{y - y'}{2a_0} + \frac{3(x - x')^2 + (y - y')^2}{16a_0^2}\right)\ln\frac{8a_0}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} - \right.$$
$$\left. - \left(2 + \frac{y + y'}{2a_0} - \frac{yy'}{2a_0^2} + \frac{(x - x')^2 - 3(y - y')^2}{16a_0^2}\right)\right]. \tag{4}$$

Durch die abermalige Reihenentwicklung und das Weglassen der Glieder höheren Grades hat sich das Restglied vergrößert.

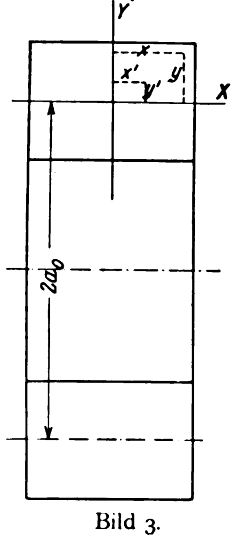


Bild 3.

(4) gilt jetzt nur mehr für $\frac{y'}{a_0} < 1$.

(1) wird nun

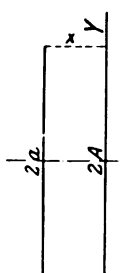
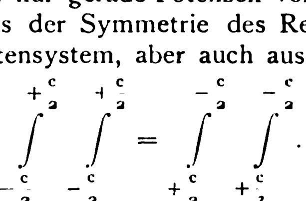


Bild 2.

$$L' = \frac{4\pi a_0}{b^2 \cdot c^2}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\frac{M}{4\pi a_0}\cdot dx \cdot dx' \cdot dy \cdot dy'. \tag{5}$$

Das ist das Integral, das von Maxwell, Stefan und Weinstein berechnet worden ist.

Im Endresultat kann sowohl b wie c nur in graden Potenzen vorkommen. Für b ist dies selbstverständlich, da (2) nur gerade Potenzen von x hat. Für c folgt es aus der Symmetrie des Rechtecks b·c zum Koordinatensystem, aber auch aus



$$\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} = \int_{+\frac{c}{2}}^{-\frac{c}{2}}\int_{+\frac{c}{2}}^{-\frac{c}{2}}.$$

Für die Auswertung des vierfachen Integrals sind von Nutzen folgende Formeln, die sich der Verfasser abgeleitet hat.

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} f(x-x')\,dx\,dx' = \varphi(b) + \varphi(-b) - 2\varphi(0), \tag{6}$$

wo $\varphi(x)$ durch zweimaliges Integrieren aus $f(x)$ hervorgeht. Ist $f(x)$ eine gerade Funktion, so wird (6)

$$2[\varphi(b) - \varphi(0)], \tag{7}$$

ist $f(x)$ ungerade, null.

Ferner ist

$$\int_{-b}^{+b} \int_{-b}^{+b} f(x-x')\,x'^{2m}\,x^{2n+1}\,dx\,dx' = 0, \tag{8}$$

wenn $f(x)$ gerade.

Das erkennt man, wenn man den Integranden als Fläche über einer (x, x') Ebene betrachtet.

Aus diesen beiden Sätzen folgt, daß man von (4) in der ersten Klammer das 2. Glied, in der zweiten das 2. und 3. unberücksichtigt lassen kann. Die 2. Klammer ist leicht auszuwerten. In der 1. Klammer liegt die Schwierigkeit beim quadratischen Glied. Hier stecken nach Stefan und Weinstein die Rechenfehler Maxwells.

Läßt man zunächst die quadratischen Glieder fort, so erhält man mit beliebigen Grenzen

$$L' = 4\pi a_0 \left(\ln \frac{8 a_0}{R} - 2\right). \tag{9}$$

Das ist die Selbstinduktion eines Kreisringes mit beliebigem Meridianquerschnitt, wenn dessen Querdimensionen klein sind gegen den mittleren Durchmesser (vgl. Orlich Kap. u. Ind., S. 76).

R ist der mittlere geometrische Abstand des Querschnittes von sich selbst, ein Begriff, den Maxwell eingeführt hat und der bei der Berechnung massiver, geradliniger und schwach gekrümmter Leiter eine große Rolle spielt (Orlich a. a. O., Maxwell, Lehrb. d. Elektrizität u. d. Magnetismus II, S. 398).

Im Fall eines rechteckigen Querschnittes ist

$$\ln R = \ln \sqrt{b^2 + c^2} - \frac{b^2}{6c^2} \ln \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}} - \frac{c^2}{6b^2} \ln \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2}} + \frac{2b}{3c} \operatorname{arctg} \frac{c}{b} + \frac{2c}{3b} \operatorname{arctg} \frac{b}{c} - \frac{25}{12}.$$

(9) läßt sich damit schreiben

$$L' = 4\pi a_0 \left(\ln \frac{8 a_0}{\sqrt{b^2 + c^2}} - y_1\right).$$

Hierin ist y_1 nur noch eine Funktion von $\frac{c}{b} = x$, kann also tabellarisch berechnet werden, und zwar genügt es, $x = \frac{c}{b}$ zu variieren zwischen 0 und 1, da y_1 symmetrisch in b und c und damit auch in x und $\frac{1}{x}$ ist. Stefan hat diese Rechnung ausgeführt. Für das Integral über die quadratischen Glieder findet man

$$\frac{3b^2 + c^2}{96 a_0^2} \ln \frac{8 a_0}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{b^2}{16 a_0^2} y_2, \tag{10}$$

wo



$$y_2 = \frac{23}{40} + \frac{221}{360}x^2 - \frac{8}{15x}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{6x^2}\ln\sqrt{1+x^2} - \frac{x^4}{30}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, \quad (11)$$

wenn wieder mit Stefan $\frac{c}{b} = x$ gesetzt wird.

Auch für y_2 hat Stefan eine Tabelle innerhalb $x = 0-1$ errechnet. Diese reicht aber nicht aus, denn (11) ist nicht symmetrisch in x und $\frac{1}{x}$. Die Tabelle gilt also nur, wenn b größer als c ist. y_2 wird für $b = 0$, also $\frac{c}{b}$ gleich unendlich, selbst unendlich, so daß $\frac{b^2}{16\,a_0^2}\cdot y_2$ unbestimmt würde und durch Grenzübergang ermittelt werden müßte.

Besser schreibt man für c größer als b, also für Flachspulen das letzte Glied in (10)

$$\frac{c^2}{16\,a_0^2}y_2',$$

wo nun y_2' als Funktion von $\frac{1}{x}$ im Intervall $0-1$ berechnet und in eine Tabelle gebracht werden kann.

Die Formel für die Selkstinduktion der Idealspule mit n hintereinander geschalteten Windungen lautet nun:

$$L = 4\pi a_0 \cdot n^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{96\,a_0^2}\right)\ln\frac{8\,a_0}{\sqrt{b^2+c^2}} - y_1 + \frac{b^2}{16\,a_0^2}y_2\right] \text{für } b \gtreqless c. \quad (12\text{a})$$

$$L = 4\pi a_0 \cdot n^2 \left[\left(1 + \frac{3b^2 + c^2}{96\,a_0^2}\right)\ln\frac{8\,a_0}{\sqrt{b^2+c^2}} - y_1 + \frac{c^2}{16\,a_0^2}y_2'\right] \text{für } b \lesseqgtr c. \quad (12\text{b})$$

(12a) ist die Formel von Stefan, wie sie gewöhnlich zitiert wird, (12b) die vom Verfasser abgeänderte. y_1 und y_2 sind von Stefan, y_2' vom Verfasser berechnet und aus den Tabellen am Schlusse dieser Arbeit zu entnehmen. Für $b = c$ gehen (12a und b) ineinander über, so wie y_2 und y_2'.

Das Korrekturglied. Da die Selbstinduktion einer Spule auch aufgefaßt werden kann als Summe der Eigeninduktionen der einzelnen Windungen und der gegenseitigen Induktionen derselben untereinander, so wird das Korrekturglied, das die Differenz der Selbstinduktion der Idealspule und der wirklichen Spule darstellen soll, sich aus zwei Teilen zusammensetzen:

1. einem Glied für die Differenz der Eigeninduktion der einzelnen Windungen und
2. einem entsprechenden Gliede für die gegenseitige Induktion.

Zu 1. Wenn die einzelne Windung, wie es im allgemeinen der Fall ist, einen im Vergleich zu ihrem Durchmesser kleinen Querschnitt hat, kann ihre Selbstinduktion nach Formel (9) berechnet werden. Ist der Querschnitt des Drahtes bei der wirklichen Spule ein Kreis vom Durchmesser d blank und D isoliert (Isolation einschließlich des eventuellen Luftzwischenraums), dann ist er bei der Idealspule ein Quadrat, das dem Kreis D umschrieben ist (Bild 4), wenn die Entfernung der Querschnittsmittelpunkte axial und radial dieselbe ist (nämlich gleich D).

Ist R_d der mittlere geometrische Abstand des Kreises d von sich selbst, R_q der des Quadrates, dann ist die Selbstinduktion der Windung bei der wirklichen Spule

$$L_d = 4\pi a_0\left(\ln\frac{8\,a_0}{R_d} - 2\right)$$

und bei der Idealspule

$$L_q = 4\pi a_0\left(\ln\frac{8\,a_0}{R_q} - 2\right)$$

Die Differenz beider ist

$$\varDelta L = L_d - L_q = 4\pi a_0 \ln \frac{R_d}{R_q}.$$

Dies ist die Korrektur für die Eigeninduktion einer Windung, wenn man von der Idealspule zur wirklichen übergeht. Sie muß positiv sein, da die elektromagnetische Energie dabei wächst. In der Tat ist

$$\ln R_q = \ln D - 0{,}80509$$

und

$$\ln R_d = \ln d - 0{,}94315 \qquad \text{(Maxwell a. a. O.)}$$

Damit wird

$$\varDelta L = 4\pi a_0 \left(\ln \frac{D}{d} + 0{,}13806\right),$$

also noch abhängig vom Radius der Windungen. Ist a_0 der mittlere Radius der Spule, so kann man je zwei Windungen in einer Ebene zusammenfassen, so daß eine den Radius $a_0 + p$, die andere $a_0 - p$ hat. Dann wird das Korrekturglied für alle n Windungen

$$\varDelta L = 4\pi a_0 \cdot n \left(\ln \frac{D}{d} + 0{,}13806\right).$$

Das hat schon Maxwell angegeben.

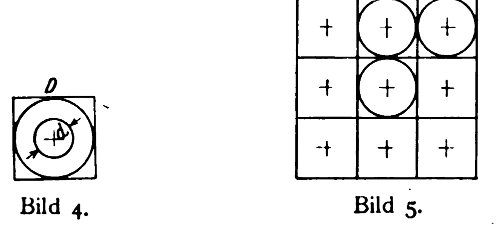


Bild 4. Bild 5.

Zu 2. Die Korrektur für die gegenseitige Induktion wird ähnlich berechnet. Wir skizzieren den umständlichen Rechnungsgang nur, dem folgender Gedankengang zugrunde liegt:

Ist der Querschnitt der Windungen wieder klein, so nähern sie sich in ihrem Verhalten dem geradliniger Leiter. Für solche ist der Einfluß der Querschnittsform um so geringer, je kleiner die Entfernung ist; bei kreisförmigem Querschnitt ist die gegenseitige Induktion unabhängig von dessen Radius.

Schon Maxwell gibt daher an (a. a. O.), daß nur die unmittelbar anliegenden Windungen zu berücksichtigen sind und daß nur das Quadrat D mit dem Kreis D zu vergleichen ist. Bild 5 zeigt einen Meridianquerschnitt durch ein Bündel von 9 Windungen, für deren mittlere die g. I. mit den 8 anliegenden berechnet wird, einmal, wenn der Querschnitt das Quadrat D und einmal, wenn er der Kreis D ist. Die Differenz ist dann die Korrektur für eine Windung. Die anliegenden Windungen zerfallen in zwei Gruppen zu je 4, innerhalb deren die Berechnung dieselbe ist: die 4 diagonal liegenden und die 4 andern. Die Berechnung der g. I. erfolgt nach einer Formel, die man erhält, wenn man in (9) für R den mittleren geometrischen Abstand der beiden Windungsquerschnitte setzt. (Näheres über diesen bei Orlich a. a. O.)

Man erkennt, daß diese Korrektur nicht proportional der Windungszahl ist, denn die außenliegenden Windungen der Spule sind nur teilweise von andern umgeben. Wenn man also die Korrektur für alle Endwindungen schreibt $4\pi a_0 \cdot n \cdot e$, so ist e ein Mittelwert, der abhängt von der Zahl und Anordnung der Windungen. Doch ist der Unterschied für die verschiedenen Fälle nur gering und fällt selbst bei ganz wenigen Windungen nicht ins Gewicht. Für e hat zuerst Maxwell einen



Wert angegeben, der aber nicht richtig war. Die folgende Tabelle enthält für verschiedene Lagenanordnungen und Windungszahlen die Werte von e, wie sie von Rosa (Bull. of the Bur. of Stand. 1907, 3, 1) berechnet sind. Es ist

bei 2	Windungen		$e = + 0,00653$
3	„	in 1 Lage	$+ 0,00904$
4	„	in 2 Lagen	$+ 0,01691$
4	„	in 1 Lage	$+ 0,01035$
8	„	in 2 Lagen	$+ 0,01335$
1000	„	50 × 20	$+ 0,01778$
∞	„		$+ 0,01806.$

Die Werte sind immer positiv. Der Stefansche Mittelwert für e ist $+ 0,01688$. Wir wollen ihn mit e_s, die Werte von Rosa mit e_r zitieren.

Das ganze Korrekturglied für alle n-Windungen wird nun

$$\varDelta L = 4 \pi a_0 \cdot n \cdot Q,$$

wo

$$Q = \ln \frac{D}{d} + 0,13806 + e. \tag{13}$$

Die vorhergegangenen Bemerkungen lassen erkennen, daß seine Genauigkeit abhängt von derjenigen der Formel (9). Diese ist um so genauer, je kleiner die Seite D des quadratischen Querschnitts einer Windung der ideellen Spule ist, die auch gleich ist dem Abstand der Querschnitts mittelpunkte der wirklichen Spule. Wir werden an einigen Beispielen die Stefansche Formel mit denen von Strasser und Esau, die für wenige Windungen sehr genau sind, vergleichen und finden, daß sie noch für $\frac{D}{2 a_0} = 0,1$ an Genauigkeit nichts zu wünschen übrig läßt[1]). Größere Werte dürften bei mehrlagigen Spulen nicht vorkommen, aber auch bei einlagigen (Zylinder-) Spulen selten sein.

Die Selbstinduktion unserer Spule wird nun

$$L = 4 \cdot \pi \cdot a_0 \cdot (n^2 \cdot P + n \cdot Q), \tag{14}$$

wo P der Wert der eckigen Klammer aus (12) ist und Q den Wert (13) hat.

Schreibt man für

$$L = 4 \cdot \pi \cdot a_0 \cdot n^2 \cdot \left(P + \frac{Q}{n}\right),$$

so sieht man, daß der Einfluß von Q mit zunehmendem n mehr und mehr abnimmt und also erst recht der von e.

Q kann bei wenigen Windungen die Größenordnung von P erreichen und sogar überschreiten, es ist daher mit derselben Genauigkeit zu berechnen wie dieses. Von etwa 100 Windungen ab beträgt sein Einfluß weniger als 1%.

Die meisten der der Stefanschen Formel zugeschobenen Fehler rühren von der Nichtbeachtung der Bedeutung des Korrekturgliedes her, die in der Regel auch noch falsche Werte für die Dimensionen b und c in P zur Folge hatte. Es werde daher hervorgehoben:

Die Dimensionen der Idealspule (b und c im Hauptglied) findet man aus der wirklichen Spule, indem man sich um jeden Drahtmittelpunkt einen Kreis beschrieben denkt, so daß die Kreise benachbarter Drähte sich berühren. Das Rechteck, das dann der Gesamtheit dieser Kreise umschrieben werden kann, hat die Dimensionen b und c. Unter Isolation ist also verstanden das gesamte nicht leitende Medium zwischen den einzelnen Drähten einschließlich der Luft. Das entspricht dem Sprachgebrauch in der Hochspannungstechnik. In Zeichen (Bild 4—8):

ist m_a die Zahl der Lagen axial,
m_r die Zahl der Lagen radial,

[1]) Näheres folgt in einer späteren Arbeit.

D der Abstand der Drahtquerschnittsmittelpunkte (axial und radial gleich), dann ist für das Hauptglied P:

$$b = m_a \cdot D,$$
$$c = m_r \cdot D.$$

Im Korrekturglied ist D die eben definierte Größe,
d der Durchmesser des nackten, runden Drahtquerschnittes.

Für e kann man, wie die Beispiele zeigen werden, mit für die Praxis genügender Genauigkeit setzen

$$e = e_s = 0{,}01688,$$

so daß mit Stefan

$$Q = \ln \frac{D}{d} + 0{,}1549 \qquad (13a)$$

wird. Alle Maße sind mit derselben Benennung einzusetzen, also auch d; P und Q sind dimensionslos, d. h. jedes einmal berechnete Wertepaar gilt für unendlich viele Spulen, die sich durch den mittleren Radius und die Windungszahl unterscheiden. L erhält man also in derselben Benennung wie a_0, d. h. in der Regel in „cm". Stefan verwendet als Einheit das „Meter".

7 Beispiele. Wir wollen die Formeln von Strasser und Esau anschreiben.

1. Zylinderspulen mit wenigen Windungen in einer Lage (Strasser)

$$L = 4\pi a_0 \left\{ n\left(\ln\frac{2a_0}{d} + 0{,}333\right) + n(n-1)\left(\ln\frac{8a_0}{D} - 2\right) - A + \frac{D^2}{8a_0^2}\left[\left(3\ln\frac{8a_0}{D} - 1\right)\frac{n^2(n^2-1)}{12} - B\right]\right\}$$

D ist die Entfernung zweier Querschnittsmittelpunkte. A und B sind nur Funktionen von n und in einer Tabelle zusammengestellt (Annalen d. Physik 1905, 17, S. 763).

2. Flachspulen mit wenigen Windungen (Esau)

$$L = 4\pi a_0 \left\{ n\left(\ln\frac{2a_0}{d} + 0{,}333\right) + n(n-1)\left(\ln\frac{8a_0}{D} - 2\right) - A' + \frac{D^2}{8a_0^2}\left[\left(\ln\frac{8a_0}{D} + 3\right)\frac{n^2(n^2-1)}{12} - B'\right]\right\}.$$

Die Bezeichnungen wie oben; von A' und B' gilt dasselbe wie von A und B (Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 1911, 5, S. 212).

Beide Formeln sind mit unseren Bezeichnungen geschrieben.

1. Beispiel: Bild 6. Zylinderspule mit $n = 2$, $a_0 = 10$, $D = 2$, $d = 0{,}1$.

Also $b = 4$; $c = 2$ Formel (12a). $\frac{c}{b} = 0{,}5$. $y_1 = 0{,}796$; $y_2 = 0{,}3066$.

$$P = 2{,}107; \qquad Q = 3{,}151 \text{ mit } e_s = 0{,}01688,$$
$$3{,}140 \text{ mit } e_r = 0{,}0065.$$

Somit nach der Stefanschen Formel

$$\frac{L}{4\pi a_0} = n^2 \cdot P + n \cdot Q = 14{,}73 \text{ mit } e_s;$$
$$14{,}708 \text{ mit } e_r;$$

nach der Strasserschen 14,691; Unterschied: 0,26% bzw. 0,12%.

2. Beispiel: Dieselbe Anordnung wie bei (1) nur statt $D = 2$, $D = 1$. Also $b = 2$, $c = 1$.

Nach Stefan: $\frac{L}{4\pi a_0} = 16{,}0618$, mit $e_s = 0{,}01688$,
$= 16{,}0408$, mit $e_r = 0{,}00653$.

Nach Strasser 16,042, d. h. 0,13% bzw. 0,007% Unterschied.
Der Fehler nimmt also mit der Ganghöhe ab.

3. Beispiel: Bild 7. Flachspule $a_0 = 10$, $g = 1$, $d = 0{,}1$, $n = 2$. Also $D = 1$, $b = 1$, $c = 2$. Formel (12b)! $\frac{b}{c} = \frac{1}{2}$; $y_1 = 0{,}706$, $y_2' = 0{,}6774$.



$\frac{L}{4\pi a_0}$ nach Stefan $= 16{,}057$ mit $e_s = 0{,}01688$,

$16{,}036$ mit $e_r = 0{,}00653$.

Nach Esau 16,0359, also 0,13% bzw. 0,0006% Unterschied.

4. Beispiel: Bild 8. Quadratischer Wicklungsraum. $n = 4$, $a_0 = 10$, $D = 1$, $d = 0{,}1$; $b = 2$, $c = 2$, $\frac{c}{b} = 1$.

$y_1 = 0{,}84834$, $y_2 = 0{,}8162$.

Esau hat im Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 1920, 15, S. 1 ff, für wenige Windungen Formeln entwickelt, von denen die S. 20 in Frage kommt. Dort ist die Windungszahl mit N bezeichnet.

Nach Stefan ist $\frac{L}{4\pi a_0} = 49{,}855$ mit $e_s \cong e_r = 0{,}01688$.

Nach Esau 49,824, d. h. 0,06% Unterschied.

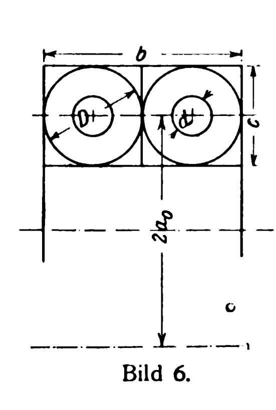


Bild 6.

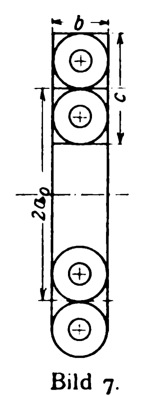


Bild 7.

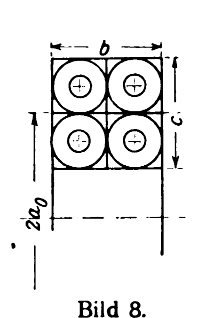


Bild 8.

5. Beispiel: Quadratischer Wicklungsraum (Bild 6). $n = 4$, $a_0 = 5$, $D = 1$, $d = 0{,}1$. Also $b = c = 2$.

Nach der Stefanschen Formel: $y_1 = 0{,}84834$,

$y_2 = 0{,}8162$,

$P = 1{,}82664$, $Q = 2{,}45756$ mit $e_r = e_s = 0{,}01688$.

$\frac{L}{4\pi a_0} = 39{,}056$, nach der Esauschen Formel 38,960. Unterschied: 0,25%.

Bei diesem Beispiel ist ebenso wie beim 1. $\frac{D}{2 a_0} = 0{,}1$.

6. Beispiel: Spule von Drude (Ann. d. Phys. 1902, 9, S. 601). Von Strasser übernommen (Ann. d. Phys. 1905, 17, S. 771). Nach den Bezeichnungen von Drude:

$2r = 2{,}92$ cm $d = 0{,}4$ mm $g = 2$ mm $n = 2$.

Nach unseren (Bild 6)

$2a_0 = 2{,}92$ $d = 0{,}04$ $D = 0{,}2$. $b = 0{,}4$
$c = 0{,}2$.

Drude gibt für $\frac{L}{2\pi a_0}$ an: experimentell bestimmt 6,50, also $L = 238$,
nach Stefan berechnet 8,38, also $L = 307$.

Strasser findet 245 nach seiner Formel. Die richtige Rechnung mit $e_r = 0{,}0065$,
nach Stefan ergibt 246,08. Die genaue Rechnung nach der Formel
von Strasser 245,99. (Strasser läßt das letzte Glied in seiner Formel weg, das zwar klein ist, aber hier beim Vergleich herangezogen werden muß.)

Unterschied zwischen Stefan und Strasser 0,04%. Die Abweichung vom Experiment 3,5%, ein Unterschied, der bei so kleinen Induktivitäten verständlich ist.

7. Beispiel: ebenfalls von Drude. Zylinderspule. Maße wie oben. Nur $n = 3$. Also $b = 0{,}6$, $c = 0{,}2$.

$L = 451$ nach Drude experimentell,
548 nach Drude mit der Stefanschen Formel,
456 nach Strasser,
459,15 mit der Strasserschen Formel genau gerechnet,
459,33 richtig gerechnet nach Stefan mit $e_r = 0{,}0090$.

Abweichung der Stefanschen Formel von der Strasserschen 0,04%.
0,18 von 459, d. h. 0,04%
vom Experiment 1,8%.

Bemerkungen zu den Beispielen. Drude hat die Bedeutung des Hauptgliedes als Selbstinduktion der Idealspule verkannt und b genommen zwischen den Drahtmitteln der ersten und letzten Lage, während er für c einfach den Durchmesser des nackten Drahtes setzt; trotzdem verwendet er ein (ungenaues) Korrekturglied. Er gibt merkwürdigerweise an (a. a. O. S. 600), daß sich ein Korrekturglied bei Stefan nicht finde in Ann. d. Phys. 1884, 258, S. 107. Das ist ein Irrtum; es ist dort S. 116, allerdings nicht im Anschluß an das Hauptglied besprochen. Strasser hat die Resultate von Drude übernommen. In den Beispielen von Esau (Jahrbuch d. drahtl. Telegr. u. Teleph. 1920, 15, S. 1) sind ebenfalls Irrtümer enthalten. Die Einwände gegen die Stefansche Formel lassen sich jedenfalls nicht aufrecht erhalten. Die Formeln von Esau und Strasser sind für wenige Windungen sehr genau und lassen sich leicht nachrechnen. Die Beispiele zeigen, daß auch die Stefansche Formel für diesen Fall an Genauigkeit nichts zu wünschen übrig läßt. Das ist ein Beweis für ihre Richtigkeit.

III. Der Gültigkeitsbereich der Stefanschen Formel.

Wir suchen für Spulen mit $\frac{b}{2\,a_0}$; $\frac{c}{2\,a_0} = 0{,}4,\ 0{,}5,\ 0{,}6$ die Fehler.

Sowohl die Formel von Stefan wie von Strasser und Esau sind Näherungsformeln, die im Prinzip auf dem Ausdruck (2) für M beruhen. Bei der Aufstellung der Stefanschen Formel wurde folgendes vernachlässigt:

1. Die Glieder höheren als 2. Grades in (2), die wir als Restglieder von (2) bezeichnen wollen,
2. die Glieder höheren als 2. Grades, die bei der Umformung von (3) in (4) auftreten.

1. Die Restglieder der Reihe (2). Wir machen folgende Überlegungen: Induktionskoeffizienten haben die Dimension einer Länge und sind also proportional einem beliebigen linearen Maß des betreffenden Leitergebildes. Der Proportionalitätsfaktor enthält nur die Verhältnisse der Maße. $\frac{M}{4\pi a}$ in (2) ist in der Tat nur abhängig von $\frac{x}{2\,a}$ und $\frac{y}{2\,a}$. Wir setzen für $\frac{x}{2\,a}:\beta$, für $\frac{y}{2\,a}:\gamma$, dann ist $\frac{M}{4\pi a}$ eine Fläche über einer (β, γ) Ebene. Ebenso bilden die Restglieder von (2) eine Fläche, die Fehlerfläche. Der Näherungswert von M in (2) werde mit M_n, der wirkliche Wert mit M_w bezeichnet, dann ist $\frac{M_w - M_n}{4\pi a}$ die Fehlerfläche. Wir berechnen diese punktweise und stellen sie dar durch eine algebraische Funktion, die innerhalb eines nicht zu großen Bereiches beliebig genau bestimmt werden und für die Integration als vollwertiger Ersatz gelten kann. Dabei können wir uns bei



der Bestimmung noch den Satz (6) zunutzemachen. Wir nehmen zu M_n die Glieder 3. Grades von (2) hinzu, da sie bei der Integration herausfallen; also aus beiden Klammern das 4. Glied. Nun fehlt nur noch ein für die Berechnung von M_w bequemer Ausdruck, der zunächst abgeleitet werden muß.

Ein rasch konvergierender Ausdruck für M.

Maxwell hat dafür die theoretische Formel abgeleitet

$$M = 4\pi\sqrt{Aa}\left(\frac{2}{k}(K - E) - kK\right) \qquad (15)$$

darin ist $k = \frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2 + x^2}}$; A und a sind die Radien der beiden Kreise (Bild 2). E und K sind die beiden vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung und nur abhängig von k. (Jahnke und Emde, Funktionentafeln S. 46 und 76, Krause, Theorie d. elliptischen Funktionen S. 85 ff., Weinstein a. a. O.) Die nach Potenzen von k fortschreitenden Reihen für E und K sind zur Berechnung nur geeignet, wenn k nahe der Null liegt. In diesem Fall müssen aber die beiden Kreise nach der Gleichung für k große Entfernungen haben, während sie in unserem Fall unendlich nahe aneinander rücken. Die in der Literatur gewöhnlich angegebenen Reihen für E und K sind daher für unsere Zwecke unbrauchbar. Deshalb hat schon Weinstein eine andere Darstellung verwendet. E und K sind auch als Funktionen von $k = \sqrt{1 - k'^2}$ entwickelbar; es ist nämlich

$$K = \ln\frac{4}{k'}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k'^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k'^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k'^6 + \ldots\right] -$$

$$\left[k'^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1\cdot 2}\right) + k'^4\left(\frac{1\cdot 2}{2\cdot 4}\right)^2\left(\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{3\cdot 4}\right) + k'^6\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\left(\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{2}{5\cdot 6}\right) - \right].$$

$$E = \ln\frac{4}{k'}\left[\frac{1}{2}k'^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}k'^4 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{5}{6}k'^6 + \ldots\right] +$$

$$\left[1 - k'^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right) - k'^4\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4}\left(\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4}\right) - k'^6\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{5}{6}\left(\frac{2}{1\cdot 2} + \frac{2}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6}\right) - \right].$$

Setzt man das in (15) ein, so erhält man die Reihe von Weinstein (Ann. d. Phys. 1884, 257, S. 344), nachdem man noch $k = \sqrt{1 - k'^2}$ nach Potenzen von k'^2 entwickelt hat; wir führen sie nicht an, da sie gut nur konvergiert, wenn k' nahe der Null, also wenn die beiden Kreise sehr nahe aneinander liegen. Bei einem einigermaßen ausgedehnten Wicklungsraum, wo also die einzelnen Stromfäden auch größere Entfernung haben, ist sie unbrauchbar zur genauen Rechnung von M.

Im Anhang des 2. Bandes von Maxwells Lehrbuch S. 609 findet sich eine Tabelle zur leichteren Berechnung der gegenseitigen Induktion zweier Kreisströme, die etwas bequemer für die Benützung auch in Jahnke und Emde, Funktionentafeln S. 77, enthalten ist. Aber für die reihenweise Berechnung von M eignet sie sich wegen der Notwendigkeit, zweimal zu interpolieren, nur wenig.

Es ist ein glücklicher Zufall, daß, wenn man (15) schreibt,

$$M = 4\pi\sqrt{Aa}\left[\frac{2}{k}(K - E) - kK\right]$$

$$= 4\pi\sqrt{Aa}\,\frac{(1 + k'^2)K - 2E}{\sqrt{1 - k'^2}}$$

der Zähler dieses Bruches eine Reihe ist, die überraschend schnell konvergiert.

Es ist nämlich

$$(1+k'^2)K-2E=\ln\frac{4}{k'}\left(1+\frac{k'^2}{4}+a_4k'^4+\ldots a_{2n}k'^{2n}+\ldots\right)$$
$$-\left(2-\frac{k'^2}{4}+b_4k'^4+\ldots b_{2n}k'^2\;+\ldots\right)\qquad(16)$$

Dabei ist

$$a_{2n}=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\ldots2n}\right)^2+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-3}{2\cdot4\cdot6\ldots2n-2}\right)^2-2\,\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-3}{2\cdot4\cdot6\ldots2-2n}\cdot\frac{2n-1}{2n}=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-3}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\right)^2.$$

$$b_{2n}=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-1}{2\cdot4\cdot6\ldots2n}\right)^2\left(\frac{2}{1\cdot2}+\frac{2}{3\cdot4}+\ldots\frac{2}{(2n-1)\cdot2n}\right)+$$
$$+\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-3}{2\cdot4\cdot6\ldots2n-2}\right)\cdot\left(\frac{2}{1\cdot2}+\frac{2}{3\cdot4}+\ldots\frac{2}{(2n-3)(2n-2)}\right)-$$
$$-2\left(\frac{1\cdot3\cdot5\ldots2n-3}{2\cdot4\cdot6\ldots2n-2}\right)^2\left(\frac{2}{1\cdot2}+\frac{2}{3\cdot4}+\ldots\frac{2}{(2n-3)(2n-2)}+\frac{1}{(2n-1)2n}\right)\cdot\frac{2n-1}{2n}=$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n}\right)a_{2n}.$$

Demnach ist

$$a_4=\frac{1}{64};\qquad b_4=\frac{a_4}{2}=\frac{1}{128}.$$
$$a_6=\frac{1}{256};\qquad b_6=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)a_6=\frac{5}{12\cdot128}.$$
$$a_8=\frac{25}{16384};\qquad b_8=\frac{59}{60}\cdot\frac{25}{16384}.$$
$$a_{10}=\frac{49}{65536};\qquad b_{10}=\frac{449}{420}\cdot\frac{49}{65536},$$

also sehr rasch abnehmend. Für $k'=1$ (den größten Wert) wird $\frac{M\cdot k}{4\pi\sqrt{Aa}}=-0{,}0003$ statt null mit dem 6. Glied in jeder Klammer; trotzdem ist natürlich für diesen Fall die Darstellung nicht mehr geeignet zur Berechnung, da $k=$ null. In unserem Fall wird k' ungefähr $=0{,}6$, dafür genügen die ersten drei Glieder.

(15) läßt sich also jetzt schreiben $\frac{M}{4\pi}=\frac{\sqrt{Aa}}{k}\cdot\varphi(k')$, wo (16) mit $\varphi(k')$ eingeführt ist. Da

$$k=\frac{2\sqrt{Aa}}{\sqrt{(A+a)^2+x^2}}$$

und $A=a+y$ ist, so erhält man

$$\frac{M}{4\pi}=a\sqrt{\left(1+\frac{y}{2a}\right)^2+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}\cdot\varphi(k').$$

$$k'\text{ ist }\sqrt{1-k^2}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(A+a)^2+x^2}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\left(\frac{y}{2a}\right)^2}{\left(1+\frac{y}{2a}\right)^2+\left(\frac{x}{2a}\right)^2}}.$$

$\frac{M}{4\pi a}$ ist also nur noch eine Funktion von $\beta=\frac{x}{2a}$ und $\gamma=\frac{y}{2a}$, nämlich es ist

$$\frac{M}{4\pi a}=\sqrt{(1+\gamma)^2+\beta^2}\left[\ln\frac{4}{k'}\left(1+\frac{k'^2}{4}+\frac{k'^4}{64}+\ldots\right)-\left(2-\frac{k'^2}{4}+\frac{k'^4}{128}+\ldots\right)\right].\qquad(17)$$

Die Tafeln für M bei Maxwell und Jahnke und Emde gehen nur von $k' = 0$ bis 0,5. Sie lassen sich also mit dieser Reihe ergänzen; in der Praxis wird in der Regel x, y und a gegeben sein; man rechnet also am besten gleich mit (17). Setzt man in (17) den Wert für k' ein und entwickelt

$$\sqrt{\left(1+\frac{y}{2a}\right)^2+\left(\frac{x}{2a}\right)^2} = \sqrt{1+\left[\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\frac{y}{a}+\left(\frac{y}{2a}\right)^2\right]}$$

sowie

$$\ln\sqrt{1+\left[\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\frac{y}{a}+\left(\frac{y}{2a}\right)^2\right]}$$

in Reihen, so erhält man den Ausdruck (2) für M, den Maxwell nach einer Methode ähnlich der der unbestimmten Koeffizienten abgeleitet hat. Nebenbei bemerkt zeigt die eben angedeutete Ableitung, daß (2) nur konvergiert innerhalb des Kreises

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^2+\frac{y}{a}+\left(\frac{y}{2a}\right)^2 = 1.$$

Wir sind also jetzt imstande M_w zu berechnen. Dazu variieren wir β und γ von null beginnend, ermitteln k' und setzen in (16) ein.

M_n erhalten wir aus (2). Damit ist für jedes Wertepaar (β, γ) $\frac{\Delta M}{4\pi a} = \frac{M_w - M}{4\pi a}$ bestimmt. Für die Dimensionen der Spule setzen wir $\frac{b}{2a_0} = \frac{c}{2a_0} = 0{,}6$.

Der Bereich für β und γ. Er ist abhängig von $\frac{b}{2a_0}$ und $\frac{c}{2a_0}$, die wir zu 0,6 angenommen haben. Das zu suchende Restglied von (2) muß für die beiden Stromfäden, die die größten Werte von $\frac{x}{2a}$ und $\frac{y}{2a}$ ergeben, genau sein. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. $\frac{M}{4\pi a}$ ist vom Vorzeichen von y abhängig, d. h. die Fläche hat für $+y$ und $-y$ verschiedene Gestalt. Dasselbe wird auch für $\frac{\Delta M}{4\pi a}$ der Fall sein. Wir müssen also zwei Ersatzfunktionen suchen, eine für $+y$ und eine für $-y$. Die für $+y$ bezieht sich dann auf den Fall, wo a der kleinere, und die für $-y$ auf den, wo a der größere der beiden Radien ist.

1. y positiv. $\frac{x}{2a}$ und $\frac{y}{2a}$ werden am größten, wenn $x = b$, $y = c$, $2a = 2a_0 - c$. Die dazugehörigen Kreise liegen diametral im Wicklungsraum. a ist der Radius des kleineren Kreises.

$$\beta_{max} \text{ ist gleich } \frac{b}{2a_0 - c} = \frac{\frac{b}{2a_0}}{1-\frac{c}{2a_0}} = 1{,}5. \quad \text{Ebenso wird } \gamma_{max} = 1{,}5.$$

2. y negativ. Hier fallen die größten Werte von $\frac{x}{2a}$ und $\frac{y}{2a}$ nicht zusammen, da a der größere Radius ist. Den größten Wert von $\frac{x}{2a}$ erhält man für

$x = b$, $y = 0$, $2a = 2a_0 - c$. Er fällt mit dem unter 1. zusammen und ist gleich 1,5. Den größten Wert von $\frac{y}{2a}$ erhält man für $y = c$ und $2a = 2a_0 + c$ zu $\frac{c}{2a_0 + c} = \frac{\frac{c}{2a_0}}{1 + \frac{c}{2a_0}} = \frac{3}{8}$. Ein anschauliches Bild vom Bereich für (β, γ) verschaffen wir uns auf folgende Weise: Wir denken uns ein $(\beta, \gamma$-$)$Achsensystem, in dessen Nullpunkt C (Bild 9) die Spur des Kreises mit dem Durchmesser eins liege. Die Spur des zweiten Kreises liegt dann für $+y$ oberhalb der β-Achse innerhalb eines Quadrates ABCD mit der Seite 1,5, für $-y$ unterhalb der β-Achse innerhalb eines Trapezes mit $CE = EF = \frac{3}{8}$. Man erkennt dies, indem man für alle möglichen gegenseitigen Lagen der Spuren zweier Kreise auf den Seiten des Rechtecks b und c (Wicklungsraum, in unserm Fall ist $b = c$) $\frac{x}{2a}$ und $\frac{y}{2a}$ bildet, einmal, wenn y positiv, a also der kleinere Radius, dann, wenn y negativ, a also der größere Radius ist. Das Quadrat und das Trapez sind also in gewisser Weise Abbilder des Wicklungsraumes für $+y$ bzw. $-y$. Die Spur des beweglichen Kreises hat in der $(\beta, \gamma$-$)$Ebene die Koordinaten β, γ. Setzen wir die entsprechenden Werte β und γ innerhalb der beiden Figuren in $\frac{M_w}{4\pi a}$ (16) und $\frac{M_n}{4\pi a}$ (2) ein und bilden die Differenz, dann erhalten wir die Fehlerfläche für $+y$ und $-y$. Die beiden Flächen gehen für $y = 0$ stetig ineinander über und haben im Nullpunkt eine horizontale Tangentialebene. Wir nehmen bei (2), wie schon erwähnt, die Glieder dritten Grades mit hinzu.

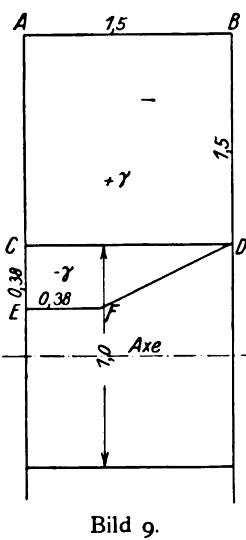


Bild 9.

Die Fehlerfläche und ihre Ersatzfunktionen. Letztere enthalten Glieder von der Form

$$\beta^m, \gamma^n \text{ und } \beta^m \cdot \gamma^n.$$

1. $\gamma = 0$

$\beta = \frac{x}{2a}$	$\frac{\Delta M}{4\pi a}$
0,1	— 0,00004
0,2	— 0,00094
0,3	— 0,0031
0,4	— 0,0073
0,5	— 0,0157
0,6	— 0,0217
0,8	— 0,0449
1,0	— 0,0641
1,2	— 0,0706
1,4	— 0,0526
1,5	— 0,0321

Diese Werte lassen sich darstellen durch:

$$-0{,}12\,\beta^3 + 0{,}03\,\beta^4 + 0{,}02\,\beta^6 + 0{,}0023\,\beta^8.$$

2. $\beta = 0$; y positiv.

$\gamma = \frac{y}{2a}$	$\frac{\Delta M}{4\pi a}$
0,1	+ 0,0001
0,2	+ 0,0007
0,3	+ 0,0038
0,4	+ 0,0107
0,5	+ 0,0224
0,6	+ 0,0387
0,8	+ 0,0978
1,0	+ 0,1911
1,3	+ 0,405
1,5	+ 0,6

Ersatzfunktion:
$+ 0{,}13\,\gamma^3 + 0{,}1\,\gamma^4 - 0{,}04\,\gamma^5$.

3. $\beta = 0$; y = negativ.

$\gamma = \frac{y}{2a}$	$\frac{\Delta M}{4\pi a}$
— 0,1	+ 0,0001
— 0,2	+ 0,0013
— 0,3	+ 0,0073
— 0,4	+ 0,022

Ersatzfunktion:
$+ 0{,}85\,\gamma^4$.

Nun fehlen noch die Glieder von der Form $\beta^m \gamma^n$. Sie spielen, wie die Integration ergeben wird, nur eine untergeordnete Rolle; wir brauchen sie also nicht mit derselben Genauigkeit zu bestimmen wie die oben angeschriebenen. Es zeigt sich, daß sie für + y dargestellt werden können durch

$$d_1 \cdot \beta^3 \cdot \gamma^3$$

für — y durch

$$d_2 \cdot \beta^2 \cdot \gamma^2,$$

wo d_1 zwischen + 0,3 und — 0,3, d_2 zwischen + 0,4 und — 0,6 liegt. Für große Werte von β und γ überwiegt das negative Zeichen. Das Resultat wurde gewonnen, indem die Fehlerfläche empirisch ermittelt, die Flächen unter 1. u. 2. bzw. 3., davon abgetragen und der Rest in Grenzen eingeschlossen wurde.

Bezeichnen wir die Funktion unter 1. mit $\varphi(\beta)$,
die unter 2. mit $\psi_1(\gamma)$,
und 3. mit $\psi_2(\gamma)$,

so ist das Restglied von (2) Seite 9

$$\frac{\Delta M_1}{4\pi a} = \varphi(\beta) + \psi_1(\gamma) + d_1\,\beta^3\,\gamma^3 \qquad \text{für } + \gamma$$

$$\frac{\Delta M_2}{4\pi a} = \varphi(\beta) + \psi_2(\gamma) + d_2\,\beta^2\,\gamma^2 \qquad \text{für } - \gamma.$$

Die Integration der Fehlerfunktion. Dieselbe Umformung, durch die (2) in (3) überging, müssen wir auch hier vornehmen, d. h. wir schreiben

$$\varDelta M_1 = 4\pi(a_0+y')\left[\varphi\left(\frac{x-x'}{2(a_0+y')}\right)+\psi_1\left(\frac{y-y'}{2(a_0+y')}\right)+d_1\frac{(x-x')^3(y-y')^3}{(2(a_0+y'))^6}\right] \quad \text{für } +\gamma$$

$$\varDelta M_2 = 4\pi(a_0+y')\left[\varphi\left(\frac{x-x'}{2(a_0+y')}\right)+\psi_2\left(\frac{y-y'}{2(a_0+y')}\right)+d_2\frac{(x-x')^2(y-y')^2}{(2(a_0+y'))^4}\right] \quad \text{für } -\gamma.$$

Ebenso wie bei (3) multiplizieren wir mit a_0+y' aus, setzen a_0+y' gleich $a_0\cdot\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)$, entwickeln aber nicht in Reihen, weil diese hier zu schlecht konvergieren würden. Wir erhalten so für das Integral

$$\frac{\varDelta L}{4\pi a_0}=\frac{1}{b^2c^2}\int\limits_{x=-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{y'=\frac{c}{2}}^{y'=y}\int\limits_{y=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\frac{\varDelta M_1}{4\pi a_0}\cdot dx\,dx'\,dy\,dy'+$$

$$+\frac{1}{b^2c^2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{y'=y}^{+\frac{c}{2}}\int\limits_{y=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\frac{\varDelta M_2}{4\pi a_0}\cdot dx\,dx'\,dy\,dy'.$$

Die Zerlegung des Integrals muß eintreten wegen der auf Seite 169 und 170 gemachten Überlegungen.

Setzt man die Ersatzfunktionen ein, so erhält man, da $\varphi(\beta)$ von γ unabhängig, also in $\varDelta M_1$ und $\varDelta M_2$ gleich ist,

$$\frac{\varDelta L}{4\pi a_0}=\frac{1}{b^2c^2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{y'=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int\limits_{y=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\left(-0{,}12\cdot\frac{(x-x')^3}{8\cdot a_0^3\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^2}+0{,}03\frac{(x-x')^4}{16a_0^4\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^3}+\right.$$

$$\left.+0{,}02\frac{(x-x')^6}{64a_0^6\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^5}+0{,}0023\frac{(x-x')^8}{256a_0^8\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^7}\right)dx\,dx'\,dy\,dy'+$$

$$+\frac{1}{b^2c^2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{y'=-\frac{c}{2}}^{y}\int\limits_{y=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}0{,}13\frac{(y-y')^3}{8a_0^3\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^2}+0{,}1\frac{(y-y')^4}{16a_0^4\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^3}-$$

$$-0{,}04\frac{(y-y')^5}{32a_0^5\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^4}+d_1\frac{(x-x')^3(y-y')^3}{64a_0^6\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^5}dx\,dx'\,dy\,dy'+$$

$$+\frac{1}{b^2c^2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{y'=y}^{y'=+\frac{c}{2}}\int\limits_{y=-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}0{,}85\frac{(y-y')^4}{16a_0^4\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^3}+d_2\frac{(x-x')^2(y-y')^2}{16a_0^4\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^3}dx\,dx'\,dy\,dy'.$$

Wir haben also drei Gruppen von Integralen, die sich durch die Integration nach y und y' unterscheiden. Die Integration nach x und x' kann nach (6) sofort

hingeschrieben werden, wobei alle Exponenten von $x - x'$ als gerade zu behandeln sind, da M ja unabhängig vom Vorzeichen von x ist. Wir erhalten so nach Division mit b^2, das vor dem Integralzeichen steht,

$$\frac{\Delta L}{4\pi a_0} = \left(-\frac{0{,}12\, b^2}{8\cdot 10\, a_0^2} p_1 + \frac{0{,}03\, b^4}{16\cdot 15\cdot a_0^4} p_2 + \frac{0{,}02\, b^6}{64\cdot 28\cdot a_0^6} p_3 + \frac{0{,}0023\, b^8}{256\cdot 45\, a_0^8} p_4\right)$$
$$+ \left(\frac{0{,}13}{8} q_1 + \frac{0{,}1}{16} q_2 - \frac{0{,}04}{32} q_3 + d_1 \frac{b^8}{64\cdot 10\, a_0^8} q_4\right) + \left(\frac{0{,}85}{16} r_1 + d_2 \frac{b^2}{16\cdot 6\cdot a_0^2} r_2\right) \qquad (18)$$

Die p, q und r sind die entsprechenden Integrale nach y und y' einschließlich des Faktors $\frac{1}{c^2}$ vor dem Integralzeichen.

Die Integration ist umständlich, läßt sich aber nicht umgehen. Wir schreiben das allgemeine Resultat an und setzen daneben die numerischen Werte für $\frac{c}{2a_0} = 0{,}4;\ 0{,}5;\ 0{,}6.$

Es ist, wenn wir $\frac{c}{2a_0} = u$ setzen

$$p_1 = \frac{1}{1-u^2}$$

u	p_1
0,4	1,19
0,5	1,33
0,6	1,56,

$$p_2 = \frac{1}{(1-u^2)^2}$$

u	p_2
0,4	1,42
0,5	1,78
0,6	2,44,

$$p_3 = \frac{1}{8u}\left(\frac{1}{(1-u)^4} - \frac{1}{(1+u)^4}\right)$$

u	p_3
0,4	2,33
0,5	3,95
0,6	8,15,

$$p_4 = \frac{1}{12a}\left(\frac{1}{(1-u)^6} - \frac{1}{(1+u)^6}\right)$$

u	p_4
0,4	4,4
0,5	10,7
0,6	33,8,

$$q_1 = \frac{1}{4u^2}\Big[(1+u)^3 \ln\frac{1-u}{1+u} + \frac{5}{6}(1+u)^3 + \frac{5}{12}(1-u)^3 + \frac{(1+u)^4}{4(1-u)} - \frac{3}{2}(1+u)^2(1-u) + u(1-u)^2\Big]$$

u	q_1
0,4	0,05
0,5	0,126
0,6	0,29,

$$q_2 = \frac{1}{4u^2}\Big[-2(1+u)^3 \ln\frac{1-u}{1+u} - \frac{2}{3}(1+u)^3 - \frac{13}{30}(1-u)^3 + \frac{(1+u)^5}{10(1-u)} - \frac{(1+u)^4}{(1-u)} + 2(1+u)^2(1-u) - u(1-u)^2\Big]$$

u	q_2
0,4	0,041
0,5	0,149
0,6	0,5

$$q_3 = \frac{1}{4u^2}\Big[\frac{10}{3}(1+u)^3 \ln\frac{1-u}{1+u} + \frac{(1+u)^6}{18(1-u)^3} + \frac{4}{9}(1-u)^3 - \frac{(1+u)^5}{2(1-u)^2} + \frac{5}{2}\frac{(1+u)^4}{1-u} - \frac{5}{2}(1+u)^2(1-u) + u(1-u)^2\Big]$$

u	q_3
0,4	0,037
0,5	0,196
0,6	0,96



$$q_4 = \frac{1}{4u^2}\left[-\frac{1}{4}\ln\frac{1-u}{1+u} + \frac{1}{16}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{1+u}{1-u}\right)^2 - \frac{2u}{1-u} - \frac{23}{48}\right]$$

$u = 0{,}4$	$q_4 = 0{,}155$
$0{,}5$	$0{,}608$
$0{,}6$	$2{,}45$

$$r_1 = \frac{1}{4u^2}\left[2(1-u)^3\ln\frac{1-u}{1+u} - \frac{2}{3}(1-u)^3 - \frac{13}{30}(1+u)^3 + \frac{(1-u)^5}{10(1+u)^2} - \frac{(1-u)^4}{1+u} + {} + 2(1-u)^2(1+u) + u(1+u)^2\right]$$

$u = 0{,}4$	$r_1 = 0{,}005$
$0{,}5$	$0{,}014$
$0{,}6$	$0{,}026$

$$r_2 = \frac{1}{4u^2}\left[\frac{11}{6}(1+u) + (1-u)\ln\frac{1-u}{1+u} + \frac{1}{6}\frac{(1-u)^3}{(1+u)^2} - \frac{(1-u)^2}{1+u} - 1 - 2u\right]$$

$u = 0{,}4$	$r_2 = 0{,}031$
$0{,}5$	$0{,}043$
$0{,}6$	$0{,}057$

Wir wollen (18) berechnen für $\frac{b}{2a_0}$ und $\frac{c}{2a_0}$ gleich 0,4; 0,5; 0,6 und zerlegen es in drei Gruppen:

a) die Glieder mit p_1, p_2, p_3, p_4, die von b und c abhängen,

b) die Glieder mit q_1, q_2, q_3 und r_1, die nur von c abhängen,

c) die Glieder mit q_4 und r_2, die von b und c abhängen und die noch nicht bestimmten Koeffizienten d_1 und d_2 enthalten.

d_1 liegt, wie schon erwähnt, zwischen $-0{,}3$ und $+0{,}3$, d_2 zwischen $-0{,}6$ und $+0{,}4$. Für große β und γ sind beide negativ; wenn wir also für d_1 $-0{,}3$ und d_2 $-0{,}6$ setzen, bekommen wir sicher ungünstige Werte. Die folgenden Tabellen enthalten das Resultat der Rechnung.

	$\frac{b}{2a_0} = 0{,}4$	0,5	0,6	
a) $\frac{c}{2a_0} = 0{,}4$	— 0,0008	— 0,0016	— 0,0027	
0,5	— 0,0009	— 0,0018	— 0,0028	
0,6	— 0,0011	— 0,0019	— 0,0031	
b) $\frac{c}{2a_0} = 0{,}4$	0,0013			
0,5	0,0035			(19)
0,6	0,0080			
c) $\frac{c}{2a_0} =$ $\frac{b}{2a_0} =$	0,4	0,5	0,6	
0,4	— 0,0001	— 0,0003	— 0,0005	
0,5	— 0,0003	— 0,0006	— 0,0009	
0,6	— 0,0008	— 0,0015	— 0,0026	

Die Werte unter a) und b), die genau sind, fassen wir in der folgenden Tabelle zusammen:

$$\begin{array}{llll} & \frac{b}{2a_0} = 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ \frac{c}{2a_0} = 0{,}4 & +0{,}0005 & -0{,}0003 & -0{,}0014 \\ 0{,}5 & +0{,}0026 & +0{,}0017 & +0{,}0007 \\ 0{,}6 & +0{,}0069 & +0{,}0061 & +0{,}0049 \end{array} \qquad (20)$$

Mit dieser Tabelle und mit der unter c) sind die Restglieder von (2) berücksichtigt. Die nächste Aufgabe ist die, die Glieder, die bei der Umformung von (3) in (4) vernachlässigt wurden, zu ermitteln.

Die bei der Umformung von (3) in (4) vernachlässigten Glieder.

Wir schreiben (3) in etwas anderer Form. Setzt man

$$A = \frac{3(x-x')^2 + (y-y')^2}{16 a_0^2}$$

$$B = \frac{(x-x')^2 - 3(y-y')^2}{16 a_0^2}$$

$$C = \frac{6(x-x')^2 - (y-y')^2}{24 a_0^2}$$

so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \frac{M}{4\pi a_0} = \Bigg[& \left(1 + \frac{y+y'}{2a_0} + A\left(\frac{1}{1+\frac{y'}{a_0}} - \frac{y-y'}{2a_0} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^2}\right)\right) \cdot \ln \frac{8a_0}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} + & \text{a)} \\ & + \ln\left(1+\frac{y'}{a_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{y+y'}{2a_0} + \ldots\ldots\right) - & \text{b)} \\ & - \left(2 + \frac{y+y'}{2a_0} + B \cdot \frac{1}{1+\frac{y'}{a_0}} - C\frac{y-y'}{2a_0} \frac{1}{\left(1+\frac{y'}{a_0}\right)^2}\right)\Bigg] & \text{c)} \end{aligned}\right\} (21)$$

Entwickelt man, wie auf Seite 159 angegeben, in Reihen, multipliziert aus und läßt die Glieder zweiten Grades, die in der Stefanschen Formel berücksichtigt sind, und ferner alle die Glieder, die nach Satz (6) und (7) bei der Integration verschwinden, fort, so erhält man drei Arten von Gliedern, die noch zu berücksichtigen sind, nämlich die aus (21 a, b, c).

Wir beschäftigen uns zunächst mit denen von (21 a).

Sie lauten nach leichter Umformung unter Verwendung von (6):

$$\frac{1}{b^2 c^2} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \frac{3(x-x')^2+(y-y')^2}{16 a_0} \cdot \left(\frac{yy'}{a_0^2} - \frac{y'^4}{a_0^4}\right) \frac{1}{\left(1-\left(\frac{y'}{a_0}\right)^2\right)^2} \ln \frac{8a_0}{\sqrt{(x-x')+(y-y')^2}} dx\,dx'\,dy\,dy' \qquad (22)$$

Das Integral direkt auszuwerten, ist kaum möglich. Wir spalten zunächst den Logarithmus in $\ln 8$ und $\ln \frac{a_0}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$ und können den Teil mit $\ln 8$ integrieren. Die Integration nach x und x' kann man sofort hinschreiben, und es verbleibt dann noch nach Division mit b^2:



$$\frac{\lg 8}{c^2}\int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \frac{\frac{1}{2} b^2+(y-y')^2}{16\, a_0^2}\left(\frac{yy'}{a_0^2}-\frac{y'^4}{a_0^4}\right)\frac{1}{\left(1-\left(\frac{y'}{a_0}\right)^2\right)^2}\, dy\, dy'. \tag{22a}$$

Wir integrieren direkt und finden folgendes Resultat für das Integral

$$-\frac{b^2}{32\, a_0^2}\left(1+\frac{1}{2\left(1-\left(\frac{c}{2 a_0}\right)^2\right)}-\frac{3 a_0}{2 c}\ln\frac{1+\frac{c}{2 a_0}}{1-\frac{c}{2 a_0}}\right)-$$

$$-\frac{1}{96}\left(\frac{\left(\frac{c}{a_0}\right)^2}{2\left(1-\left(\frac{c}{2 a_0}\right)^2\right)}-\frac{c}{2 a_0}\ln\frac{1+\frac{c}{2 a_0}}{1-\frac{c}{2 a_0}}\right)-$$

$$-\frac{1}{192}\left(\left(\frac{c}{a_0}\right)^2+\frac{\left(\frac{c}{a_0}\right)^2}{2\left(1-\left(\frac{c}{2 a_0}\right)^2\right)}-\frac{3 c}{2 a_0}\ln\frac{1+\frac{c}{2 a_0}}{1-\frac{c}{2 a_0}}\right)-$$

$$-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{12}\left(\frac{c}{a_0}\right)^2+\frac{1}{2\left(1-\left(\frac{c}{2 a_0}\right)^2\right)}-\frac{5}{2}\cdot\frac{a_0}{c}\ln\frac{1+\frac{c}{2 a_0}}{1-\frac{c}{2 a_0}}+2\right).$$

Setzt man in (22a) für $\frac{b}{2 a_0}$ und $\frac{c}{2 a_0}$ 0,4, 0,5, 0,6, so ergeben sich folgende Werte, die wir wieder in eine Tabelle bringen.

	$\frac{b}{2 a_0} = 0{,}4$	0,5	0,6
$\frac{c}{2 a_0} = 0{,}4$	$-0{,}0018$	$-0{,}0019$	$-0{,}0021$
0,5	$-0{,}0039$	$-0{,}0044$	$-0{,}0049$
0,6	$-0{,}0106$	$-0{,}0118$	$-0{,}0132$

(22 a)

Den andern Teil aus der Klammer (21 a), der mit $\ln\frac{a_0}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}}$ multipliziert ist, schätzen wir ab. Wir führen neue Variable ein:

$$u=\frac{x}{a_0},\quad u'=\frac{x'}{a_0},\quad v=\frac{y}{a_0}\quad\text{und}\quad v'=\frac{y'}{a_0}$$

und setzen für

$$M=(3(u-u')^2+(v-v')^2)\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{(u-u')^2+(v-v')^2}}$$

$$N=(3(u-u')^2+(v+v')^2)\cdot\ln\frac{1}{\sqrt{(u-u')^2+(v+v')^2}}.$$

Dann wird unser Integral, wenn wir zunächst von der Integration nach x und x' absehen,

$$\frac{2 a_0^2}{16 c^2}\int\limits_0^{+\frac{c}{2 a_0}}\int\limits_0^{+\frac{c}{2 a_0}}(M-N)(v\cdot v'-v'^4)\frac{1}{(1-v'^2)^2}\, dv\, dv'. \tag{22b}$$

Wir haben Gebrauch gemacht von der Tatsache, daß der Integrand in (22) seinen Wert nicht ändert, wenn das Vorzeichen von y und y' gleichzeitig wechselt. In (22b) haben v und v' nur das positive Zeichen und man kann den Ausdruck leichter abschätzen.

Das Vorzeichen von (22b) hängt wesentlich von dem von (M — N) ab. Denn $v \cdot v' - v'^4$ ist nur negativ innerhalb des kleinen Teiles der positiven (v, v'-) Ebene, der unterhalb der kubischen Parabel $v = v'^3$ liegt, wobei zu bedenken ist, daß v und v' höchstens 0,6 sind.

M und N sind beide positiv [1]). Über das Vorzeichen von M — N orientiert man sich, indem man für u — u' der Reihe nach 0, 0,1, 0,2, 0,3 .... 1,2 setzt. Man findet, daß M — N vorwiegend negativ ist. M — N wird also dem absoluten Wert nach sicher größer, wenn man N vergrößert. Das geschieht aber, wenn man in N unter dem Logarithmus v + v' durch v — v' ersetzt. N gehe dadurch über in N'. Dann ist also

$$|M - N| \leqq |M - N'| = \left| -4\, vv' \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{(\mu - \mu')^2 + (v - y')^2}} \right|.$$

Setzt man darin u — u' = 0, so wird der absolute Wert abermals größer. Man kann also sagen: das Integral (22b) ist negativ und absolut genommen sicher kleiner als (oder höchstens gleich)

$$\left| \frac{a_0^2}{2c^2} \int_0^{+\frac{c}{2a_0}} \int_0^{+\frac{c}{2a_0}} vv'(vv' - v'^4) \frac{1}{(1 - v'^2)^2} \ln(v - v')\, dv\, dv' \right|$$

Man entwickelt den Bruch in eine Reihe, multipliziert aus und bekommt so

$$\frac{a_0^2}{2c^2} \int_0^{+\frac{c}{2a_0}} \int_0^{+\frac{c}{2a_0}} (v^2 v'^2 + 2 v^2 v'^4 - vv'^5) \cdot \ln(v - v')\, dv\, dv'.$$

Die Integration ergibt:

$$\left(\frac{c^4}{9 \cdot 128\, a_0^4} + \frac{c^6}{15 \cdot 256\, a_0^6} - \frac{c^6}{3 \cdot 2048\, a_0^6}\right) \cdot \ln \frac{c}{2a_0} - \frac{c^4}{9 \cdot 64\, a_0^4} - \frac{1021\, c^6}{7200 \cdot 256\, a_0^6} + \frac{149\, c^6}{240 \cdot 2048\, a_0^6}.$$

Die höheren Glieder spielen keine Rolle. x und x' sind herausgefallen; die Integration nach beiden ändert daher, wenn man noch mit b^2 dividiert, nichts an dem Ausdruck.

Setzt man wieder für

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{c}{2a_0} = 0{,}4, & \text{so erhält man} & -0{,}001 \\ \phantom{\frac{c}{2a_0} =}\ 0{,}5 & & -0{,}0027 \\ \phantom{\frac{c}{2a_0} =}\ 0{,}6 & & -0{,}0053 \end{array}\right\} \qquad (22b)$$

Das sind Maximalwerte absolut genommen; die wirklichen Werte sind kleiner [2]).

Die Glieder von (21b und c). Wir entwickeln $\ln\left(1 + \frac{y'}{a_0}\right)$ und $\frac{1}{1 + \frac{y'}{a_0}}$, in Reihen, so daß wir algebraische Glieder erhalten, die leicht zu integrieren sind. Es bleiben nur Glieder mit geraden Potenzen (nach 6 und 8) übrig, deren Koeffizienten durch die Integration sehr verkleinert werden. Wir übergehen hier die leichte, aber umfangreiche Zwischenrechnung und schreiben nur das Resultat an:

(21b) ergibt:

$$-\frac{b^2}{a_0^2}\left(0{,}0033 \frac{c^2}{a_0^2} - 0{,}0001 \frac{c^6}{a_0^6}\right) - 0{,}0018 \frac{c^4}{a_0^4}.$$

---

[1]) Das ist die ungünstigste Annahme; siehe Fußnote [2]).

[2]) Die wirklichen Werte von 0,5 ab sind möglicherweise sogar positiv, da M und N in diesem Teil des Integrationsgebietes nicht mehr überall und gleichzeitig positiv sind.

(21 c) ergibt:

$$+\frac{b^2}{a_0^2}\left(0{,}0026\frac{c^2}{a_0^2}+0{,}0009\frac{c^4}{a_0^4}+0{,}00026\frac{c^6}{a_0^6}\right)+0{,}0027\frac{c^4}{a_0^4}+0{,}00017\frac{c^6}{a_0^6}.$$

Dies gibt zusammen (21 b) und (21 c)

$$-\frac{b^2}{a_0^2}\left(0{,}0007\frac{c^2}{a_0^2}-0{,}0009\frac{c^4}{a_0^4}-0{,}00016\frac{c^6}{a_0^6}\right)+0{,}0009\frac{c^4}{a_0^4}+0{,}00017\frac{c^6}{a_0^6}. \quad (23)$$

Die folgende Tabelle gibt wieder die ausgerechneten Werte.

$\frac{c}{2a_0}$ \ $\frac{b}{2a_0}$ =	0,4	0,5	0,6
0,4	+ 0,0004	+ 0,0003	+ 0,0003
0,5	+ 0,0013	+ 0,0014	+ 0,0016
0,6	+ 0,0033	+ 0,0038	+ 0,0046

(23)

Damit sind alle Glieder berücksichtigt, die bei der Stefanschen Formel vernachlässigt worden sind. Es sind dies die in den Tabellen (20), (22 a) und (23) sowie in (22 b) und (19 c). Die ersten drei sind exakt berechnet, die letzten zwei sind geschätzt. Ihre absoluten Werte sind in Wirklichkeit kleiner. Wir fassen die ersten drei in einer neuen Tabelle zusammen, die also (20) und (22 a) und (23) enthält.

$\frac{c}{2a_0}$ \ $\frac{b}{2a_0}$ =	0,4	0,5	0,6
0,4	— 0,0009	— 0,0020	— 0,0032
0,5	— 0,0000	— 0,0013	— 0,0016
0,6	— 0,0004	— 0,0019	— 0,0037

(24)

Ebenso fassen wir in der nächsten Tabelle die Werte der geschätzten Glieder zusammen, also (19 c) und (22 b)

$\frac{c}{2a_0}$ \ $\frac{b}{2a_0}$ =	0,4	0,5	0,6
0,4	— 0,0011	— 0,0013	— 0,0015
0,5	— 0,0030	— 0,0033	— 0,0036
0,6	— 0,0061	— 0,0068	— 0,0079

(25)

Endlich soll in der folgenden Tabelle der nach der Stefanschen Formel berechnete Wert von $\frac{L}{4\pi a_0}$, darunter die gesamte Korrektur, also die Summe der Werte aus der vorigen und der vorvorigen Tabelle, $\frac{\Delta L}{4\pi a_0}$ und darunter der Betrag dieser Korrektur in Prozent zusammengestellt werden:

$\frac{c}{2a_0}$ \ $\frac{b}{2a_0}$ =	0,4	0,5	0,6
0,4	1,1808	1,0953	1,0122
	— 0,0020	— 0,0033	— 0,0047
	0,17%	0,3%	0,47%
0,5	1,0931	1,0076	0,9348
	— 0,0030	— 0,0046	— 0,0052
	0,27%	0,45%	0,55%
0,6	0,9872	0,9349	0,8688
	— 0,0065	— 0,0087	— 0,0116
	0,66%	0,9%	1,3%

Fehler der Stefanschen Formel

Die Genauigkeit kann noch weiter getrieben werden, wenn man die Werte der Tabelle (24), die genau sind, von den Werten der Stefanschen Formel in Abzug bringt, und es verbleiben dann nur noch als Fehler die Werte in der Tabelle (25). Der Fehler ist dann selbst für die größten Spulendimensionen

$$\frac{b}{2\,a_0} = 0{,}6 \text{ und } \frac{c}{2\,a_0} = 0{,}6$$

kleiner als 1%. Durch geeignete Überlegungen kann auch dieser Fehler noch auf 0,5% herabgedrückt werden. Darüber folgt näheres in einer weiteren Arbeit. Er nimmt mit den Dimensionen rasch ab. Eine größere Genauigkeit zu verlangen, wäre übertrieben.

Bei Spulen mit $\frac{c}{2\,a_0} = 0{,}6$ ist der äußere Durchmesser viermal so groß wie der innere! Solche mit $\frac{b}{2\,a_0} > 0{,}6$ sollen noch untersucht werden.

Kontrolle unserer Rechnung für die Spezialfälle c = o bzw. b = o.

1. $c = 0$ ist der Fall des unendlich dünnwandigen Zylinders, den Emde exakt berechnet hat. Die Stefansche Formel geht dafür über in

$$\frac{L}{4\pi a_0} = \left(1 + \frac{b^2}{32\,a_0^2}\right)\cdot \ln\frac{8\,a_0}{b} - 0{,}5 + \frac{b^2}{128\,a_0^2},$$

was schon von Rayleigh abgeleitet worden ist.

Unser Korrekturglied wird hierfür:

$$\frac{\Delta L}{4\pi a_0} = \frac{1}{b^2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{\Delta M}{4\pi a_0}\,dx'\,dx =$$

$$= \frac{1}{b^2}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int\limits_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} (-0{,}12\,\beta^3 + 0{,}03\,\beta^4 + 0{,}02\,\beta^6 + 0{,}0023\,\beta^8)\,dx\,dx',$$

wo $\beta = \frac{x - x'}{2\,a_0}$. Das Integral läßt sich mit Hilfe von Satz (6) unmittelbar anschreiben. Es ist

$$\frac{\Delta L}{4\pi a_0} = -\frac{0{,}12}{10}\cdot\left(\frac{b}{2\,a_0}\right)^3 + \frac{0{,}03}{15}\left(\frac{b}{2\,a_0}\right)^4 + \frac{0{,}02}{28}\left(\frac{b}{2\,a_0}\right)^6 + \frac{0{,}0023}{45}\left(\frac{b}{2\,a_0}\right)^8.$$

Die folgende Tabelle enthält für $\frac{b}{2\,a_0} = 0{,}4 \ldots 1{,}5$ die Werte nach Stefan (L_s) nach Emde (L_e), die Differenz beider ($L_e - L_s$) und die Korrektur nach unserer Berechnung ΔL.

	$\frac{L_s}{4\pi a_0}$	$\frac{L_e}{4\pi a_0}$	$\frac{L_e - L_s}{4\pi a_0}$	$\frac{\Delta L}{4\pi a_0}$
0,4	1,8536	1,8530	— 0,0006	— 0,0007
0,5	1,6522	1,6509	— 0,0013	— 0,0014
0,6	1,4937	1,4914	— 0,0023	— 0,0023
0,8	1,2582	1,2529	— 0,0053	— 0,0053
1,0	1,0907	1,0814	— 0,0093	— 0,0093
1,25	0,9390	0,9237	— 0,0153	— 0,0155
1,5	0,8269	0,8060	— 0,0209	— 0,0210

Die Übereinstimmung der letzten beiden Reihen kann nicht besser sein.

2. $b = 0$ ist der Fall der unendlich dünnen Kreisscheibe, den Spielrein exakt berechnet hat. Die Stefansche Formel geht dafür über in [(12b): $y_2' = 0,5972$ aus der Tabelle am Schlusse dieser Arbeit]

$$\frac{L}{4\pi a_0} = \left(1 + \frac{c^2}{96 a_0^2}\right) \cdot \ln \frac{8 a_0}{c} - 0,5 + \frac{c^2}{16 a_0^2} y_2'.$$

Unser Korrekturglied würde sich für diesen Fall aus Tabelle (19b), aus (22) und Formel (23) zusammensetzen. Da wir aber hier ganz genau rechnen wollen, und die Werte von (22) nur geschätzt sind, sollen sie für unseren Spezialfall exakt ermittelt werden.

Das Integral (22) geht für $b = 0$ über in

$$\frac{1}{c^2} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \frac{(y - y')^2}{16 a_0^2} \cdot \left(\frac{y y'}{a_0^2} - \frac{y'^4}{a_0^4}\right) \cdot \frac{1}{\left(1 - \left(\frac{y'}{a_0}\right)^2\right)^2} \cdot \ln \frac{8 a_0}{y - y'} \cdot dy\, dy'.$$

Wir entwickeln $\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{y'}{a_0}\right)^2\right)^2}$, multiplizieren aus und finden:

$$\frac{1}{c^2} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \int\limits_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} \left(\frac{y^3 y'}{a_0^4} - \frac{2 y^2 y'^2}{a_0^4} + \frac{y y'^3}{a_0^4} - \frac{5 y^2 y'^4}{a_0^6} + \frac{2 y y'^5}{a_0^6} + \frac{4 y^3 y'^3}{a_0^6} - \frac{8 y^2 y'^6}{a_0^8} + \frac{4 y y'^7}{a_0^8}\right.$$
$$\left. + \frac{6 y^3 y'^5}{a_0^8} - \frac{2 y'^8}{a_0^8}\right) \cdot \ln \frac{8 a_0}{y - y'} \cdot dy\, dy'.$$

Man ermittelt zuerst das Integral für den allgemeinen Fall $y^m y'^n \cdot \ln \frac{8 a_0}{y - y'}$ und setzt dann die speziellen Exponenten ein. Wir schreiben nur das Resultat an:

$$-\left(0,00087 \frac{c^4}{a_0^4} + 0,00046 \frac{c^6}{a_0^6} + 0,0001 \frac{c^8}{a_0^8}\right) \cdot \ln \frac{8 a_0}{c} -$$
$$- 0,00022 \frac{c^4}{a_0^4} - 0,00016 \frac{c^6}{a_0^6} - 0,00012 \frac{c^8}{a_0^8}.$$

Das gibt für

$\frac{c}{2 a_0}$	
= 0,4	— 0,0013
0,5	— 0,0034
0,6	— 0,0080.

Mit (19b) und (23) [in (23) $b = 0$!] bekommt man für

$\frac{c}{2 a_0}$	
= 0,4	+ 0,0004
0,5	+ 0,0012
0,6	+ 0,0023,

d. h., also die nach unserer Methode berechneten Werte von $\frac{\Delta L}{4\pi a_0}$. Die folgende Tabelle enthält die Werte nach Stefan (L_{st}) und Spielrein (L_{sp}) sowie deren Differenz.

$\frac{c}{2 a_0}$	$\frac{L_{st}}{4\pi a_0}$	$\frac{L_{sp}}{4\pi a_0}$	$\frac{L_{sp} - L_{st}}{4\pi a_0}$
0,4	1,8418	1,8422	+ 0,0004
0,5	1,6384	1,6395	+ 0,0011
0,6	1,4793	1,4814	+ 0,0021.

Die letzte Reihe ist fast identisch mit unserer Korrektur in der vorigen Tabelle.

Für die Glieder von der Form b^m bzw. c^n ist damit die Richtigkeit unserer Rechnung bestätigt. Daß die Glieder von der Form $b^m \cdot c^n$ keine große Rolle spielen können, erkennt man, wenn man das folgende vierfache Integral betrachtet. Es ist

$$\frac{1}{b^2 c^2}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}}\int_{-\frac{c}{2}}^{+\frac{c}{2}} (x - x')^m (y - y')^n \, dx\, dx'\, dy\, dy' = \frac{4 b^m c^n}{(m+1)\cdot(m+2)\cdot(n+1)\cdot(n+2)},$$

wenn m und n beide gerade, sonst null. Schon bei $m = 2$, $n = 2$ ist der Faktor von $b^m c^n$ gleich $\frac{1}{36}$. Diese Verkleinerung der Koeffizienten tritt auch bei den Gliedern der ersten Reihe von (2) auf, obwohl sie noch mit dem Logarithmus multipliziert sind. Das überraschende Resultat unserer Untersuchung dürfte damit verständlicher sein.

Zusammenfassung und Schluß.

Die Berechnung von eisenlosen Drosselspulen war bisher nur bei ganz bescheidenen Ansprüchen der Praxis ein gelöstes Problem. Über solche mit Kreisringform (mittlerer Durchmesser $2a_0$) und rechteckigem Wicklungsraum (b axiale, c radiale Ausdehnung) gibt es eine umfangreiche Literatur, aber man sucht vergeblich nach einer zuverlässigen Formel, wenn $\frac{b}{2a_0}$ und $\frac{c}{2a_0}$ gleichzeitig etwa größer als 0,2 sind. Die einzige, die in Frage kommen könnte, ist die von Stefan; aber einmal gibt dieser selbst an, daß sie nur gilt, wenn b und c klein sind im Vergleich zu $2a_0$, und dann ist sie in den letzten Jahren in Mißkredit gekommen, weil sie für wenige Windungen angeblich versagte, also gerade wenn b und c klein sind.

In dieser Arbeit wird gezeigt:

1. Daß die Formel von Stefan zwar in der bisher immer zitierten und von ihm selbst veröffentlichten Form nur gilt, wenn b größer als c ist, und daß sie für b kleiner als c geschrieben werden muß in der Form (12b) Seite 161.

y_3' ist aus untenstehender Tabelle zu entnehmen.

2. Daß sie aber nach dieser Berichtigung für jede beliebige Windungszahl, auch beliebig kleine, ebenso genaue Resultate liefert wie Spezialformeln.

3. Daß sie selbst für Spulen mit $\frac{b}{2a_0} = \frac{c}{2a_0} = 0{,}6$ nur einen Fehler ergibt, der kleiner ist als 1,3% und der mit abnehmendem b und c rasch abnimmt.

Die Formel gilt für kreisförmigen Drahtquerschnitt; ohne Korrekturglied für rechteckigen mit zu vernachlässigender Isolation.

Über die Anwendung der Formel ist näheres auf Seite 163 ff. gesagt.

Der Verfasser hat die Absicht, eine Tabelle mit zwei Eingängen $\frac{b}{2a_0}$ und $\frac{c}{2a_0}$ zu veröffentlichen, aus der die Selbstinduktion von Spulen (mit Hilfe eines Zusatzgliedes auch von solchen, bei denen $\frac{b}{2a_0}$ größer als 0,6 ist, also längeren) entnommen werden kann. Der Fehler soll dabei auf 0,5% bei den größten Dimensionen herabgedrückt werden. Das Problem dürfte damit praktisch gelöst sein.

Auch die Berechnung von vielen Fällen der gegenseitigen Induktion von Spulen ist hiermit ermöglicht, insbesondere von solchen, die sich berühren oder sehr nahe liegen, und für die es bisher keine Berechnungsmethode gab.



Die folgende Tabelle gibt die Werte für y_2' zur Formel (12b) Seite 161 abhängig von $\frac{b}{c}$. Dazwischen liegende Werte können durch Interpolation mit genügender Genauigkeit gefunden werden.

$\frac{b}{c}$	y_2'	$\frac{b}{c}$	y'_2
0	0,5972	0,6	0,7050
0,1	0,6023	0,7	0,7223
0,2	0,6151	0,8	0,7598
0,3	0,6312	0,9	0,7906
0,4	0,6539	1,0	0,8162
0,5	0,6774		

Die Werte für y_1 und y_2 sind in der Literatur, z. B. bei Orlich, Kap. und Ind. S. 286, zu finden. In den meisten Fällen genügen die ersten zwei Dezimalen bei y_2 und y_2'; die ersten drei bei y_1.

Breslau, Elektrotechnisches Institut.

Die Schutzerdung bei der dielektrischen Verlustmessung an Hochspannungskabeln.

Von

R. Dieterle, Charlottenburg.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

I. Einleitung.

Legt man eine Wechselspannung E an einen Luftkondensator, so eilt der Strom J, solange die dielektrische Fertigkeitsgrenze der Luft an keiner Stelle überschritten wird, um genau 90^0 der Spannung E voraus; der Kondensator ist verlustfrei.

Bei einem festen Dielektrikum ist im allgemeinen die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung etwas kleiner als 90^0, diese Aweichung von 90^0 wird der Verlustwinkel δ genannt. Der hiermit verknüpfte Energieverlust N berechnet sich zu

$$N = E \cdot J \cdot \cos\varphi = E \cdot J \cdot \cos(90^0 - \delta) = E \cdot J \cdot \sin\delta.$$

$\cos\varphi$ ist bei Hochspannungskabeln der Leistungsfaktor des Ladestromes des leerlaufenden Kabels. Da die Leistung hier einen Energieverlust bedeutet, so möge $\cos\varphi$ im folgenden dielektrischer Verlustfaktor genannt werden. Er ist bei vielen Stoffen in weitem Bereich von der geometrischen Form des Kondensators und von der angelegten Spannung und in engerem Bereich von der Frequenz derselben nahezu unabhängig, so daß er als eine charakteristische Größe für das betreffende Material angesehen wird.

Der Verlustwinkel δ ist schon mehrfach für verschiedene Isolierstoffe bei niedriger Spannung gemessen worden. Zu seiner Messung bei Hochspannung wurde in der Reichsanstalt eine von H. Schering angegebene Brückenmethode[1]) ausgebildet. Bei der weiter vervollkommneten Methode[2]) kann an der Einstellung

[1]) A. Semm, Verlustmessungen bei Hochspannung, Arch. f. Elektrot. 9, S. 30, 1920.

[2]) Schering, Dieterle, Tätigkeitsber. der PTR, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 41, S. 139, 1921. — Eine ausführliche Mitteilung wird folgen.

eines veränderlichen Kondensators direkt der Wert von $\operatorname{tg}\delta$ abgelesen werden. Für normale Kabel ist δ so klein, daß ohne weiteres $\operatorname{tg}\delta = \sin\delta$ und damit $\operatorname{tg}\delta = \cos\varphi$ ist. Der Winkel δ ist theoretisch unabhängig von der Länge der Kabel, die große Empfindlichkeit der Methode ermöglicht daher die Vornahme der Verlustmessungen an Kabelstücken von wenigen Metern Länge. Bei kurzen Stücken macht sich der Einfluß der an den Enden des Kabels gestörten Feldverteilung ungünstiger bemerkbar als bei langen Stücken. Es können zwar die Kriechströme längs der freien Oberfläche der Isolierhülle dadurch verkleinert werden, daß dort die Isolation verstärkt wird, aber sie lassen sich nicht ganz unterdrücken. Es werden daher die Ströme an den Enden durch das Mittel der Schutzerdung von der Messung ausgeschlossen.

In der vorliegenden Arbeit soll die Notwendigkeit der Schutzerdung für die Verlustmessungen an Kabeln dargestellt und eine möglichst zweckmäßige Anbringung derselben beschrieben werden.

II. Einfachkabel.

Die Länge jeder Probe betrug etwa 5 m. Der Bleimantel wurde an beiden Enden auf eine Länge von 50 cm abgenommen, dann wurde wenige Zentimeter von den Enden des Mantels entfernt je ein 2—3 mm breiter ringförmiger Streifen aus dem Blei herausgeschnitten. Von den auf diese Weise vom Mantel isolierten Schutzringen konnten die Ströme an den Enden direkt zur Erde abgeführt werden. Da bei der Meßanordnung der Mantel über einen kleinen Widerstand geerdet ist, so treten hierbei zwischen dem Mantel und den Schutzringen nur Spannungsdifferenzen unter 1 Volt auf. Durch diese Schutzerdung ist außer der Feldverteilung auch die zur Messung verwendete Länge des Kabels als die Strecke zwischen den zwei Ausschnitten am Mantel gut definiert.

Zur Feststellung der Wirkung dieser Schutzerdung wurden jeweils zwei Messungen des dielektrischen Verlustfaktors ausgeführt, das eine Mal wurden die Schutzringe geerdet, das andere Mal mit dem Mantel leitend verbunden und hierdurch ihre Schutzwirkung aufgehoben. Damit dies ohne Abschalten der Hochspannung möglich war, wurden die Schutzringe mit einer Abzweigklemme verbunden, von der zwei Drähte abgingen. Nun konnte ein Draht gefahrlos von dem Erdungspunkt gelöst und mit dem Mantel verbunden werden, sodann der zweite ebenfalls und umgekehrt.

Die Messungen wurden gewöhnlich sofort nach dem Anlegen und Steigern der Wechselspannung (50 Per/s) vorgenommen. Als niedrigste Spannung wurden 10 kV angelegt, sie wurde sodann in Stufen von 5 kV erhöht. Wenn eine meßbare Änderung der Größe des Verlustfaktors mit der Dauer der Beanspruchung zu erwarten war, so wurde die Messung für die eine Schaltung der Schutzringe von zwei Messungen für die andere Schaltung zeitlich eingeschlossen und durch Interpolation der entsprechende Wert ermittelt. Für Dauerbeanspruchung wurde gewöhnlich das 1 ½- bis 2 fache der Betriebsspannung des Kabels gewählt und bei dieser Spannung die Messung vorgenommen.

Die Verlustmessungen wurden für drei verschiedene Arten der Isolierung der Kabelenden ausgeführt. Für jede Art werden zwei Messungsreihen in Kurvenform als Beispiele hier mitgeteilt. Die verschiedene Isolierung der Enden wurde jedoch nicht an ein- und demselben Kabel, sondern an Kabeln mit verschiedenen Abmessungen und verschiedenen Tränkmassen angebracht, so daß die absolute Größe der Verlustfaktoren nicht ohne weiteres miteinander verglichen werden darf.

1. Die Isolation der Kabelenden wurde nicht verstärkt.

Schon bei verhältnismäßig niedriger Spannung wurde Sprühen an den Enden der Schutzringe beobachtet; bei höheren Spannungen wurde hierdurch das zur



Messung benutzte Vibrationsgalvanometer bei nicht geerdeten Schutzringen so stark beeinflußt, daß die Nullstellung nur vorübergehend erzielt werden konnte; bei 35 kV traten Gleitfunken von einigen Zentimetern Länge auf, welche genaue Messungen bei nicht geerdeten Schutzringen unmöglich machten, die Spannung wurde daher nicht weiter gesteigert.

Ferner wurde das Kabel 21 Stunden lang mit 25 kV beansprucht und hierbei mehrmals gemessen.

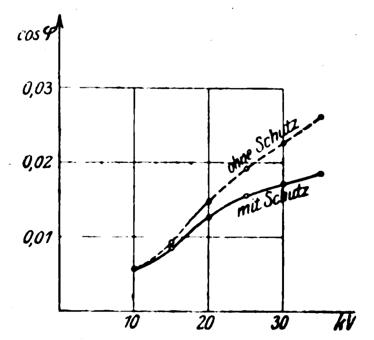


Bild 1a. Isolation der Enden nicht verstärkt.

Bild 1b. Isolation der Enden nicht verstärkt Dauerbeanspruchung mit 25 kV.

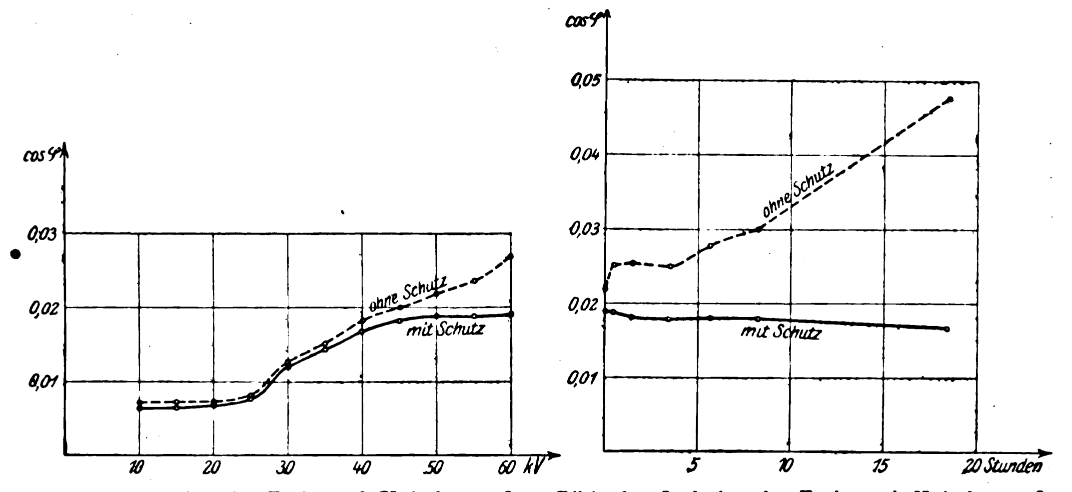


Bild 2a. Isolation der Enden mit Kabelvergußmasse verstärkt.

Bild 2b. Isolation der Enden mit Kabelvergußmasse verstärkt. Dauerbeanspruchung mit 50 kV.

Die in den Bildern 1a und 1b dargestellten Meßergebnisse lassen erkennen, daß durch den Schutzring, besonders bei höheren Spannungen, beträchtliche Meßfehler vermieden werden, z. B. würde im vorliegenden Falle bei 25 kV der Verlustfaktor um etwa 25% zu groß gemessen.

2. Die Isolation der Kabelenden wurde mit Kabelvergußmasse verstärkt.

Auf die Schutzringe wurden Papiertrichter von etwa 60° Öffnungswinkel und etwa 20 cm Höhe aufgesetzt und mit Kabelvergußmasse gefüllt.

Die in den Bildern 2a und 2b wiedergegebenen Messungen zeigen, daß die Verstärkung der Isolation der Enden durch Kabelausgußmasse allein nicht genügt, um große Meßfehler zu verhindern. Bei der 18stündigen Dauerbeanspruchung mit 50 kV stieg der Fehler von 15% auf fast 200%. Die dielektrischen Verluste in der verwendeten Vergußmasse waren so groß, daß sich die Trichter außen um über 10° C erwärmten.

3. Die Isolation der Kabelenden wurde mit **Kabeltränkmasse** verstärkt.

Hierzu wurden Blechtrichter verwendet, die einen Öffnungswinkel von 90°, eine Höhe von 15 cm und einen zylindrischen Hals von 4 cm Länge hatten. Mit diesem Hals wurden die Trichter entweder auf den Schutzringen befestigt oder direkt auf das vom Bleimantel befreite Kabelende geschoben, so daß die Trichter selbst zugleich als Schutzringe dienten. Der Rand der Trichter war durch angelötete Panzerkabel gegen Sprühen geschützt. Diese Trichter wurden mit einer Kabeltränkmasse gefüllt.

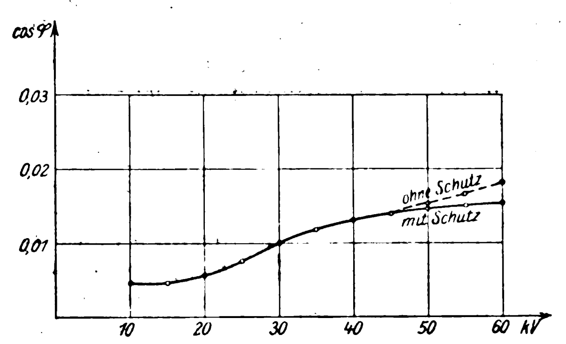
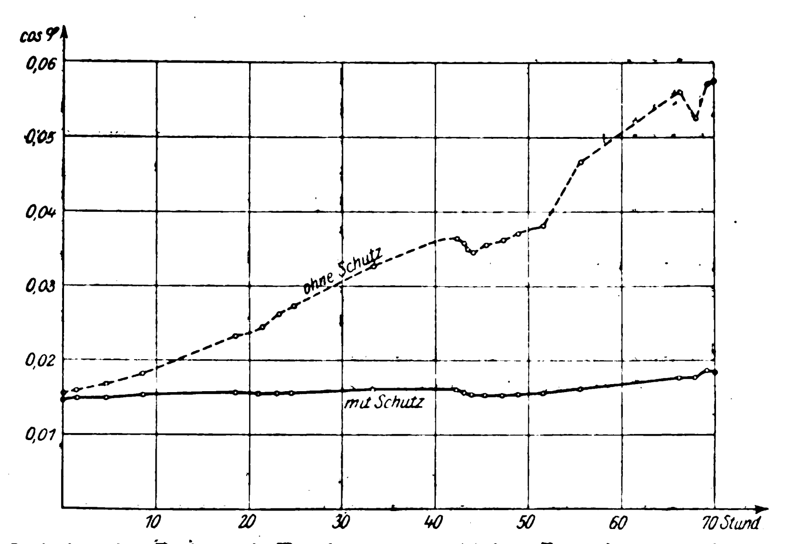


Bild 3a. Isolation der Enden mit Tränkmasse verstärkt.

Das Bild 3a zeigt deutlich, daß die Verstärkung der Isolation der Enden durch Tränkmasse im Vergleich zu den anderen Mitteln ohne Schutzerdung die kleinsten Meßfehler ergibt. Bei der in Bild 3b dargestellten 70stündigen Dauerbeanspruchung mit 50 kV stieg zwar der Fehler von 5%, auf 220%, diese Erhöhung ist aber in erster Linie der fortschreitenden Korrosion zuzuschreiben, welche die Oberfläche des



Bile 3b. Isolation dei Enden mit Tränkmasse verstärkt. Dauerbeanspruchung mit 50 kV.

aus dem Trichter herausragenden Teiles der Isolierhülle des Leiters im Laufe der Beanspruchung erlitt, es traten dort allmählich starke Glimmerscheinungen auf.

Die vorliegenden Kurven zeigen für alle drei Arten der Isolierung der Kabelenden, daß durch das Anbringen von Schutzringen an den Enden des Mantels beträchtliche Meßfehler vermieden werden. Die Fehler können bei Dauerbeanspruchungen im Verlauf weniger Stunden schon außerordentlich ansteigen und dadurch bei der angelegten Spannung ein starkes Anwachsen des Verlustfaktors des Kabels mit der

Zeit der Beanspruchung vortäuschen. Die Zunahme des Verlustfaktors der Enden des Kabels kann sowohl durch das zur Verstärkung dienende Isoliermittel als auch durch die eintretende Korrosion der freien Isolierhülle des Leiters bedingt sein.

III. Dreifachkabel.

Bei der Beanspruchung eines Dreifachkabels mit einer Wechselspannung kann der dielektrische Verlustfaktor in der Schaltung „3 Leiter gegen den Mantel" mit Schutzringen an den Mantelenden in derselben Weise wie beim Einfachkabel gemessen werden. Sollen jedoch die Verlustfaktoren bei der Beanspruchung der Leiter gegeneinander gemessen werden, so genügt dieser Schutz nicht mehr, denn dann müssen auch die am Meßwiderstand liegenden Leiter an ihren Enden gegeneinander abgeschützt sein.

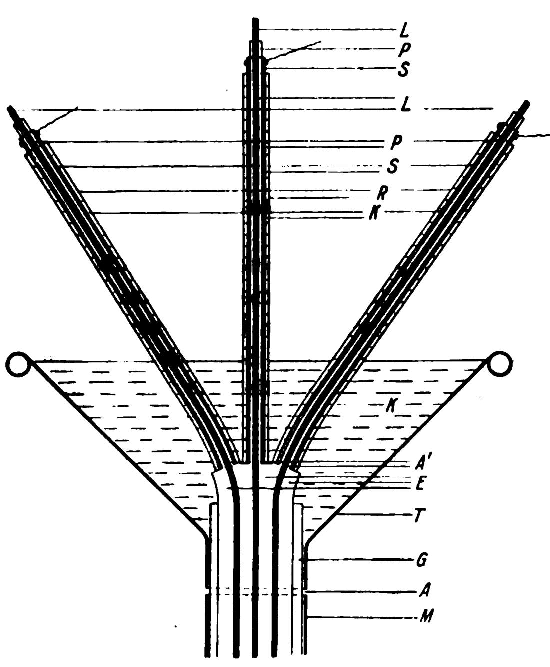


Bild 4. Schematische Darstellung der Abschützung der Enden eines Dreifachkabels.

Es wurde folgendermaßen verfahren (Bild 4):

Die gemeinsame Isolierhülle G der drei Leiter L wurde bis auf einen Ring von etwa 7 cm Höhe außerhalb der Enden des Bleimantels M entfernt, die Isolierhülle E jedes einzelnen Leiters wurde noch etwa 3 cm lang belassen, der übrige Teil wurde bei allen Leitern bis auf wenige Lagen Papier P entfernt. Auf P wurden dünne Schutzhüllen S aus Stanniol gewickelt, diese Schutzhüllen erhielten besondere Zuleitungen, so daß sie von den zugehörigen Leitern isoliert bleiben oder leitend mit ihnen verbunden werden konnten. Damit zwischen den Schutzhüllen keine Überschläge auftreten konnten, wurden die Leiter auseinandergebogen und mit Papprohren R umgeben, die unten verstopft waren. In diese Rohre R wurde eine Kabeltränkmasse K gefüllt. Die Abschützung des Mantels geschah wie beim Einfachkabel durch Schutztrichter T aus Blech, die auf die gemeinsame Leiterisolation G aufgesetzt wurden und vom Mantel M noch einen 2—3 mm breiten Abstand A hatten. Diese Trichter wurden ebenfalls mit Tränkmasse K gefüllt.

Sollten nun z. B. die Leiter 1 und 2 gegen den Leiter 3 und den Mantel beansprucht werden, so wurden an jedem Ende des Kabels die Schutzhülle S des Leiters 3 und der Schutztrichter T an Erde gelegt. Die Schutzhüllen S der Leiter 1 und 2, welche in diesem Falle nicht benötigt werden, wurden mit ihren Leitern verbunden.

In der Schaltung „3 Leiter gegen den Mantel" ist wie beim Einfachkabel die zur Messung verwendete Länge des Kabels als die Strecke zwischen den zwei Ausschnitten A am Mantel bestimmt. Werden aber die Leiter gegeneinander beansprucht, z. B. „Leiter 1 und 2 gegen Leiter 3 und Mantel", so geht der Mantel bis zu seinen Ausschnitten A in die Messung ein, aber der Leiter 3 bis zu seinen Schutzhüllen S. Diese Unsymmetrie kann nicht vermieden werden, denn die Schutzhüllen verursachen an ihrem Anfang A' eine schwache Stelle des Kabels, sie müssen daher möglichst

weit voneinander entfernt sein und dürfen deshalb erst an den auseinandergebogenen Leitern beginnen.

Um den Einfluß der zwei Strecken A A' von je 10 cm Länge auf die Messung feststellen zu können, wurde ein Kabel von 4 m Meßlänge in der Schaltung „3 Leiter gegen den Mantel" in verschiedener Weise gemessen, das eine Mal wurden wie gewöhnlich die 3 Leiter und ihre Schutzhüllen an die Hochspannung, der Mantel an den Meßwiderstand und die Trichter an Erde gelegt. Das zweitemal wurde der isoliert aufgestellte Mantel und seine Trichter an die Hochspannung, die 3 Leiter an den Meßwiderstand und ihre Schutzhüllen an Erde gelegt. Im letzteren Falle wurden daher die zwei Strecken A A' mitgemessen. Die Messung ergab fast denselben Verlustfaktor wie in der normalen Schaltung, der Einfluß dieser Strecken dürfte daher im allgemeinen vernachlässigt werden.

Der Einfluß der Schutzerdung auf die Messung wurde in folgenden drei Schaltungen ermittelt. Zuerst wurden alle Schutzhüllen an ihre Leiter und die Trichter an den Mantel gelegt. Hierbei wurden die Enden der Leiter und des Mantels, die am Meßwiderstand lagen, mitgemessen. Dann wurden die Trichter an Erde gelegt, also die Messung von dem Fehler befreit, den die Enden des Mantels verursachten, der Einfluß der Enden der Leiter wurde als Fehler noch mitgemessen. Schließlich wurden auch diejenigen Schutzhüllen geerdet, deren Leiter am Meßwiderstand lagen, dadurch wurde der Verlustfaktor frei von beiden Fehlern gemessen. Die Differenzen der Ergebnisse ließen den Einfluß der Schutzerdung erkennen.

In den folgenden Tabellen I und II und den Bildern 5 und 6 sind die Ergebnisse zusammengestellt, die bei diesen Messungen an einem 5 m langen Dreifachkabel erhalten wurden.

Tabelle I.

Schaltung: Ein Leiter gegen die zwei anderen und den Mantel.

Angelegte Spannung in kV	cos φ bei Schutzerdung		
	nicht angewendet	nur am Mantel	an den Leitern und am Mantel
10	0,0073	0,0061	0,0053
15	0,0074	0,0061	0,0053
20	0,0076	0,0063	00,053
25	0,0084	0,0067	0,0056
30	0,0097	0,0077	0,0060
35	0,0117	0,0090	0,0075
40	0,0134	0,0105	0,0084
45	0,0154	0,0118	0,0094
50	0,0174	0,0134	0,0102

Tabelle II.

Schaltung: Zwei Leiter gegen den dritten und den Mantel.

Angelegte Spannung in kV	cos φ bei Schutzerdung		
	nicht angewendet	nur am Mantel	am Leiter und am Mantel
10	0,0072	0,0056	0,0053
15	0,0072	0,0057	0,0053
20	0,0072	0,0057	0,0053
25	0,0075	0,0058	0,0054
30	0,0083	0,0065	0,0058
35	0,0098	0,0074	0,0067
40	0,0114	0,0087	0,0079
45	0,0133	0,0099	0,0088
50	0,0148	0,0111	0,0101

Aus den Tabellen und Kurven ist ersichtlich, daß bei dem vorliegenden Kabel in der Schaltung „ein Leiter gegen die zwei anderen und den Mantel“ der Verlustfaktor ohne Schutzerdung durchschnittlich um 60% zu hoch gemessen wurde, nach der Abschützung des Mantels allein blieb noch ein Fehler von etwa 25% übrig, der durch die ungeschützten Enden der zwei am Meßwiderstand liegenden Leiter verursacht wurde. In der Schaltung „zwei Leiter gegen den dritten und den Mantel“ wurden die Fehler kleiner, weil diesmal die Enden nur eines Leiters als ungeschützt in Betracht kamen. Der Verlustfaktor wurde hier ohne jede Schutzerdung durchschnittlich um 45% zu hoch gemessen, nach der Abschützung des Mantels allein blieb noch ein Fehler von etwa 10% übrig, der durch die ungeschützten Enden des dritten Leiters verursacht wurde.

Es ergibt sich also, daß bei Verlustmessungen am Dreifachkabel bei der Beanspruchung der Leiter gegeneinander auch die Enden der Leiter abgeschützt werden müssen, da sonst beträchtliche Fehlerquellen vorhanden sind.

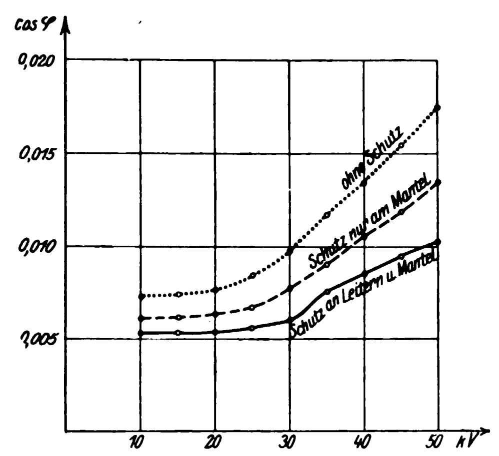


Bild 5. Schaltung: Ein Leiter gegen die zwei anderen und den Mantel.

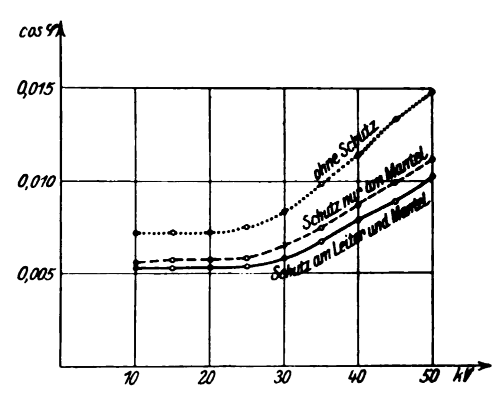


Bild 6. Schaltung: Zwei Leiter gegen den dritten und den Mantel.

Der Einfluß der ungeschützten Enden nimmt natürlich mit der Länge der Kabel ab, andererseits sammelt sich bei wochenlangen Dauerbeanspruchungen auf den Kabelenden soviel Feuchtigkeit und Schmutz an, daß für die Verlustmessungen auch bei längeren Kabelstücken die volle Abschützung der Enden angezeigt erscheint.

IV. Zusammenfassung.

Der ungünstige Einfluß der Enden kurzer Stücke von Hochspannungskabeln auf die Messung ihres „dielektrischen Verlustfaktors“ wurde untersucht und durch geeignete Schutzmaßnahmen beseitigt. Als sehr zweckmäßig erwies sich hierbei das Zubereiten der Kabelenden mit Blechtrichtern und Tränkmasse.



Über elektrische Energieübertragungen.

Von

K. H. Warfvinge.

Eine elektrische Energieübertragung allgemeiner Art (technischer Transformator, Fernleitung, Fernsprechübertrager usw.) kann man bekanntlich durch zwei lineare Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}_1 &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{B} \mathfrak{J}_2 \\ \mathfrak{J}_1 &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{C} \mathfrak{V}_2\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

beschreiben, deren Koeffizienten $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bei gegebener Frequenz als komplexe Konstanten zu betrachten sind und der Bedingungsgleichung

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B} \mathfrak{C} = 1 \quad (2)$$

genügen. $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{J}_2$ in den Gleichungen (1) sind die Spannungen und Ströme an den primären bzw. den sekundären Klemmen. Die obigen Gleichungen hat wohl zuerst Franke aufgestellt[1]). La Cour hat sie später allgemeiner abgeleitet[2]). Für die Gültigkeit der Gleichungen (1) ist nur das Bestehen des Superpositionsgesetzes für alle Teile des zwischen den Primär- und Sekundärklemmen befindlichen Stromkreises erforderlich. Es wird also angenommen, daß mehrere gleichzeitig bestehende Betriebszustände sich überlagern, ohne sich gegenseitig zu stören. Die Gleichungen sind nicht mehr gültig, wenn der Stromkreis stark gesättigte Eisenteile enthält, oder richtiger, die Koeffizienten sind dann nicht mehr konstant.

Die Gleichung (2) versagt z. B. für eine Fernsprechleitung, die einen einseitig wirkenden Verstärker enthält. In diesem Falle ist der bekannte Umkehrungssatz[3]) offenbar nicht gültig. Dieser ist aber eine unmittelbare Folgerung der Gleichung (2), und umgekehrt kann (2) als eine Folge des Umkehrungssatzes betrachtet werden. Auf Grund der Gleichungen (1) und (2) ist es allerdings möglich, eine ziemlich allgemeine Theorie der Erscheinungen in Wechselstromkreisen aufzubauen. Die ganz verschiedenen Betriebsbedingungen der Starkstromnetze einerseits und der Fernsprechleitungen andererseits haben aber verschiedene Grundlagen für die theoretische Behandlung der Starkstrom- bzw. der Schwachstromprobleme geschaffen. Beispielsweise kann den in der Starkstromtechnik üblichen Wechselstromdiagrammen eine konstante primäre Klemmenspannung zugrunde gelegt werden, währenddem in der Fernsprechtechnik diese Voraussetzung im allgemeinen nicht zutrifft. Trotzdem lassen sich auch die auf diesem Gebiete auftretenden Erscheinungen auf jene bequeme Betrachtungsweise zurückführen, wie im folgenden gezeigt wird. Dadurch ist es möglich, Wechselstromdiagramme von ziemlich allgemeinem Charakter zu konstruieren.

Löst man aus (1) $\mathfrak{V}_2$ und $\mathfrak{J}_2$, so folgt vermöge (2)

$$\begin{aligned}\mathfrak{V}_2 &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{V}_1 - \mathfrak{B} \mathfrak{J}_1 \\ \mathfrak{J}_2 &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{J}_1 - \mathfrak{C} \mathfrak{V}_1.\end{aligned}$$

Betrachtet man die Seite 2 als Primärseite, so ist es zweckmäßig, die Stromrichtungen umzukehren, und man erhält dann entsprechend den Gleichungen (1)

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{V}_2 &= \mathfrak{A}_2 \mathfrak{V}_1 + \mathfrak{B} \mathfrak{J}_1 \\ \mathfrak{J}_2 &= \mathfrak{A}_1 \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{C} \mathfrak{V}_1\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Aus (1) und (3) ergeben sich sogleich die bekannten Ausdrücke der von der Primär- bzw. von der Sekundärseite aus gemessenen Leerlauf- und Kurzschlußcharakteristiken, und zwar

[1]) Franke, ETZ. 1891, 459.
[2]) La Cour, Leerlauf- und Kurzschlußversuch in Theorie und Praxis. 1904.
[3]) Franke a. a. O., Breisig, Theoretische Telegraphie, 1910, S. 295.

$$\mathfrak{U}_{10} = \frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{C}}; \quad \mathfrak{U}_{1k} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_2}; \quad \mathfrak{U}_{20} = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{C}}; \quad \mathfrak{U}_{2k} = \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}_1}. \tag{4}$$

Zwischen denselben besteht die Beziehung

$$\mathfrak{U}_{10}\,\mathfrak{U}_{2k} = \mathfrak{U}_{20}\,\mathfrak{U}_{1k}. \tag{5}$$

Es sei jetzt angenommen, daß auch der vor den Primärklemmen liegende Teil des Stromkreises die für das Bestehen der Hauptgleichungen (1), (2) notwendigen Bedingungen erfüllt, und daß zuerst nur eine einzige elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ irgendwo in diesem Teil wirksam ist. Wir denken uns den inneren Widerstand des Stromerzeugers außerhalb desselben verlegt, was auf die Strom- und Spannungsverteilung im Netze keinen Einfluß hat. Dann ist die Klemmenspannung des Generators gleich $\mathfrak{E}$, und man kann entsprechend der ersten der Gleichungen (1) die Beziehung aufstellen

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}_1'\,\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{B}'\,\mathfrak{J}_1,$$

wo $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{B}'$ wieder konstante Koeffizienten sind. Beachtet man, daß $\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}_1'}$ nach der vierten Gleichung (4) in diesem Falle offenbar der von den Netzklemmen aus gemessene Scheinwiderstand $\mathfrak{Z}_1$ der Zuleitung ist, so ersieht man hieraus, daß die Größe

$$\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{A}_1'} = \mathfrak{e} \tag{6}$$

eine Konstante ist, sofern nur die eingeprägte elektromotorische Kraft $\mathfrak{E}$ von der Belastung unabhängig ist. Wirken mehrere elektromotorische Kräfte im Netz, so gilt für jede einzelne eine Gleichung von der Form (6). Addiert man sämtliche Gleichungen, so ergibt sich wieder eine Beziehung von der Form (6), die also allgemein gültig ist. Die Unabhängigkeit der eingeprägten elektromotorischen Kräfte von der Belastung dürfte wohl in fast allen praktischen Fällen vorhanden sein. Die Größe $\mathfrak{V}_1 + \mathfrak{Z}_1\,\mathfrak{J}_1$ ist meines Wissens zuerst von R. Holm als Konstante benutzt worden[1]). Der Wert desselben berechnet sich z. B. aus den Leerlaufswerten von $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{J}_1$. Führt man den Ausdruck von $\mathfrak{V}_1$ aus (6) in die erste der Gleichungen (1) ein, so ergeben sich die folgenden Übertragergleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e} &= \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{V}_2 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{J}_2 \\ \mathfrak{J}_1 &= \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{J}_2 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{V}_2 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

die sich auf eine Energieübertragung mit konstanter Primärspannung beziehen. Die Koeffizienten des Systems (7) drücken sich aus durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{C}\,\mathfrak{Z}_1; & \mathfrak{a}_2 &= \mathfrak{A}_2 \\ \mathfrak{b} &= \mathfrak{B} + \mathfrak{A}_2\,\mathfrak{Z}_1; & \mathfrak{c} &= \mathfrak{C} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

a) b)

Bild 1.

und es gilt:

$$\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = 1.$$

Die vorgelegte Energieübertragung kann jetzt durch das Ersatzbild (Bild 1a) dargestellt werden. Ebenso wie man aus Gleichung (1) die vier Charakteristiken des ursprünglichen Systems ableiten konnte, so kann man auf Grund der Gleichung (7) vier für den Ersatzstromkreis charakteristische Scheinwiderstände aufstellen. Für das Folgende genügt uns die Charakteristik

$$\mathfrak{w}_2 = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{U}_{20} \cdot \frac{\mathfrak{U}_{1k} + \mathfrak{Z}_1}{\mathfrak{U}_{10} + \mathfrak{Z}_1}. \tag{9}$$

$\mathfrak{w}_2$ ist der von den unbelasteten Sekundärklemmen aus gemessene Scheinwiderstand des Übertragers, wenn dieser auf der Primärseite

[1]) R. Holm, Über die Berechnung von Übertragern f. Telephonzwecke, Archiv f. Elektrotechnik VI, S. 115.

mit dem Netz verbunden ist. Sämtliche Größen, die in den Gleichungen (7), (8), (9) enthalten sind, können an den Klemmen von $\mathfrak{V}_1$ oder $\mathfrak{V}_2$ (Bild 1a) gemessen werden.

Sekundäre Stromstärke und Spannung.

Faßt man nur die hinter den Sekundärklemmen sich abspielenden Vorgänge ins Auge, so kann man ein einfacheres Ersatzbild benutzen, indem man die erste Gleichung (7) in der Form schreibt:

$$\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}_1} = \mathfrak{V}_2 + \mathfrak{w}_2 \mathfrak{J}_2 = (\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{w}_2)\,\mathfrak{J}_2, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{Z}_2$ den Belastungswiderstand bedeutet. Als Ersatzbild ergibt sich dann ein einfacher Stromkreis, der eine konstante elektromotorische Kraft $\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}_1}$, den Zuleitungswiderstand $\mathfrak{w}_2$ und den Belastungswiderstand $\mathfrak{Z}_2$ in Reihe enthält (Bild 1b). Um die sekundär veränderlichen Größen in Abhängigkeit von der Belastung möglichst

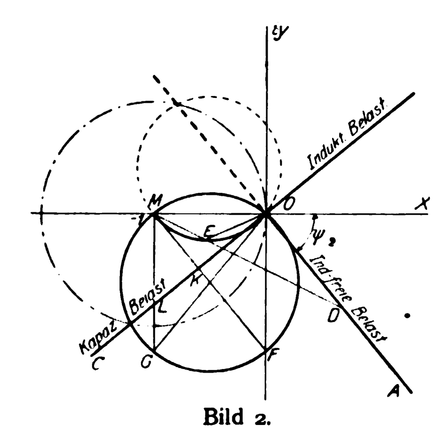


Bild 2.

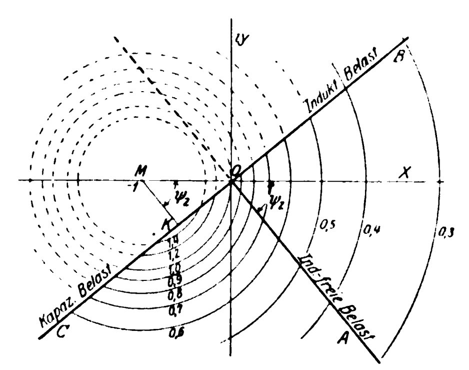


Bild 3. Kurven für konstanten Sekundärstrom.

allgemein darzustellen, führen wir als unabhängige Veränderliche den Quotienten $z = \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{w}_2}$ ein. z wird im folgenden, wo keine Verwechslung entstehen kann, auch kurzweg als Belastung bezeichnet. Nach (10) kann man jetzt schreiben

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{J}_2 : \mathfrak{J}_{2k} &= \frac{1}{z+1} \\ \mathfrak{V}_2 : \mathfrak{V}_{20} &= \frac{z}{z+1} = 1 - \frac{1}{z+1} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

wo $\mathfrak{J}_{2k} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{w}_2}$ den Sekundärkurzschlußstrom und $\mathfrak{V}_{20} = \frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}_1}$ die Sekundärleerlaufspannung bedeuten. Wir denken uns die Veränderliche z in einer komplexen Ebene gedeutet, in welcher also z die rechtwinkligen Koordinaten $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ besitzt. Mit angestrichenen Buchstaben bezeichnen wir, wie üblich, die konjugierten der betreffenden komplexen Größen. Ist ψ_2 der Phasenwinkel des Scheinwiderstandes $\mathfrak{w}_2$, so entsprechen die Punkte der Halbgeraden OA (Bild 2) induktionsfreien Belastungen $\mathfrak{Z}_2$. Die zu OA senkrechte Gerade BC enthält alle Punkte z, die rein induktive oder Kapazitätsbelastungen darstellen. Dem Bild 2 ist ein positiver Winkel ψ_2 zugrunde gelegt. Die Größe des Winkels ist nur mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit der Bilder gewählt worden.

Die Transformation $\frac{1}{z+1}$ vermittelt bekanntlich eine Abbildung der z-Ebene auf sich selbst, welche durch Spiegelung des Punktes z an dem Einheitskreis um den Punkt -1 als Mittelpunkt und einer darauffolgenden Spiegelung an der reellen Achse geometrisch ausgeführt werden kann. Von der zweiten Spiegelung können wir absehen und uns mit dem durch die Spiegelung am Einheitskreis entstehenden Bildpunkt begnügen. Der Abstand dieses Bildpunktes von dem Punkt -1 ist nämlich nach (11) gleich dem absoluten Betrage des Quotienten $\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_{2k}}$, und der Abstand desselben Bildpunktes vom Anfangspunkt stellt der Größe nach den Quotienten $\frac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_{20}}$ dar. Der Phasenwinkel zwischen $\mathfrak{J}_2$ und $\mathfrak{V}_2$ ist bestimmt durch die Belastung z, und zwar durch denjenigen Winkel, den der Radiusvektor von O nach z mit der Halbachse OA einschließt. Einer induktionsfreien Belastung $z = \overline{OD}$ entsprechen

$$\left|\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_{2k}}\right| = ME$$

$$\left|\frac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_{20}}\right| = OE.$$

Die Halbachse OA wird durch die Inversion auf den Kreisbogen MEO und die Achse BC auf den Kreis OFGM abgebildet. Der maximale Sekundärstrom entsteht bei positivem Phasenwinkel ψ_2 mit einer Kapazitätsbelastung $|z| = OK = \sin\psi_2$ oder $\mathfrak{z}_2 = -i\,|\mathfrak{w}_2|\sin\psi_2$ und hat den Wert

$$|\mathfrak{J}_{2\max}| = MF \times |\mathfrak{J}_{2k}| = \frac{|\mathfrak{J}_{2k}|}{\cos\psi_2}.$$

Die maximale Sekundärspannung ist

$$|\mathfrak{V}_{2\max}| = GO \times |\mathfrak{V}_{20}| = \frac{|\mathfrak{V}_{20}|}{\cos\psi_2}$$

und wird erreicht bei einer Kapazitätsbelastung $|z| = OL = \frac{1}{\sin\psi_2}$ oder $\mathfrak{z}_2 = -i\,|\mathfrak{w}_2|\cdot\frac{1}{\sin\psi_2}$. Dieser Belastungszustand ist von Wichtigkeit bei manchen Detektorschaltungen der drahtlosen Telegraphie sowie für den Betrieb des Gittertransformators eines hochevakuierten Glühkathodenverstärkers.

Der Ort derjenigen Punkte z, welche einem bestimmten Wert der Sekundärstromstärke entsprechen, ergibt sich nach (11) aus der Gleichung

$$(z+1)(\bar{z}+1) = \left|\frac{\mathfrak{J}_{2k}}{\mathfrak{J}_2}\right|^2.$$

Es sei in diesem Zusammenhang daran erinnert, daß die Gleichung eines Kreises in der komplexen z-Ebene mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ und dem Radius ϱ allgemein in der Form

$$(z-\mathfrak{m})(\bar{z}-\bar{\mathfrak{m}}) = \varrho^2$$

geschrieben werden kann. Denn der Faktor $(z-\mathfrak{m})$ ist die Strecke, welche die Punkte $\mathfrak{m}$ und z verbindet, und die linke Seite ist also das Quadrat des absoluten Betrages dieser Strecke. Der gesuchte Ort ist ein Kreis mit dem Punkt -1 als Mittelpunkt und mit dem Radius $\left|\frac{\mathfrak{J}_{2k}}{\mathfrak{J}_2}\right|$. Die Kurven konstanter Sekundärstromstärke bilden somit eine Schar konzentrischer Kreise um -1 (Bild 3).

Analog erhält man die Kurven konstanter Sekundärspannung nach (11) aus der Gleichung

$$\frac{z\bar{z}}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \left|\frac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_{20}}\right|^2$$

oder, wenn man $\left|\frac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_{20}}\right|$ gleich k setzt

$$\left(z - \frac{k^2}{1-k^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{k^2}{1-k^2}\right) = \frac{k^2}{(1-k^2)^2}.$$

Wird k als Parameter betrachtet, so stellt diese Gleichung eine Kreisschar ohne Schnittpunkte und mit den Grenzpunkten 0 und -1 dar. Die Mittelpunkte liegen auf der reellen Achse und der Punkt $-{}^1/_2$ hat in bezug auf sämtliche Kreise der Schar dieselbe Potenz ${}^1/_4$. Der Kreis um diesen Punkt als Mittelpunkt mit dem Radius ${}^1/_2$ schneidet also die Schar orthogonal. Daraus läßt sich die Kreisschar leicht konstruieren. Zieht man nämlich von einem beliebigen Punkt R der reellen Achse (Bild 4) eine Tangente RT an den genannten festen Kreis, so ist RT der Radius desjenigen Kreises der Schar, der in R seinen Mittelpunkt hat. Das Bild 3 zeigt den Verlauf der Kreisschar für $\mathfrak{J}_2$ = konstant und das Bild 4 der Kurven für $\mathfrak{V}_2$ = konstant. Die jeder Kurve beigefügte Zahl gibt das Verhältnis $\left|\frac{\mathfrak{J}_2}{\mathfrak{J}_{2k}}\right|$ bzw. $\left|\frac{\mathfrak{V}_2}{\mathfrak{V}_{20}}\right|$ an.

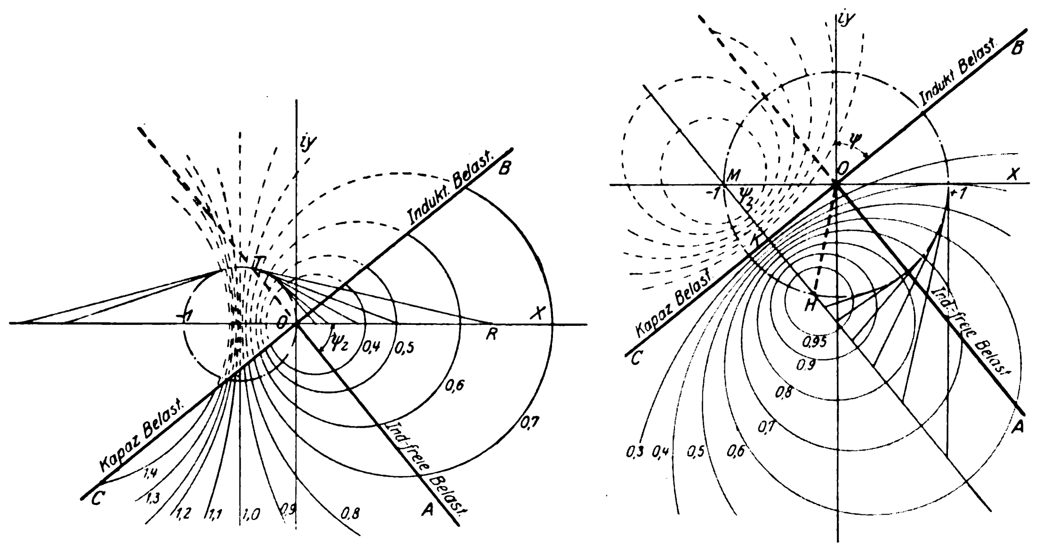


Bild 4. Kurven für konstante Sekundärspannung.

Bild 5. Kurven für konstante Sekundärleistung.

Sekundärleistung.

Die an den Klemmen von $\mathfrak{V}_2$ (Bild 1 a) abgegebene Leistung kann ausgedrückt werden durch

$$W_2 = \frac{1}{2}\left[\mathfrak{V}_2\bar{\mathfrak{J}}_2 + \bar{\mathfrak{V}}_2\mathfrak{J}_2\right].$$

Nach (10) und wegen $\mathfrak{V}_2 = \mathfrak{Z}_2\mathfrak{J}_2$ ist also

$$W_2 = \frac{\mathfrak{e}\bar{\mathfrak{e}}}{2\,\mathfrak{a}_1\bar{\mathfrak{a}}_1}\cdot\frac{\mathfrak{Z}_2+\bar{\mathfrak{Z}}_2}{(\mathfrak{Z}_2+\mathfrak{w}_2)(\bar{\mathfrak{Z}}_2+\bar{\mathfrak{w}}_2)}. \tag{12}$$

Führt man wieder den Quotienten $z = \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{w}_2}$ ein und setzt

$$\frac{\frac{z}{\mathfrak{w}_2} + \frac{\bar{z}}{\bar{\mathfrak{w}}_2}}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \frac{1}{\varkappa},$$

so ist

$$\left(z + 1 - \frac{\varkappa}{\mathfrak{w}_2}\right)\left(\bar{z} + 1 - \frac{\varkappa}{\bar{\mathfrak{w}}_2}\right) = \left(1 - \frac{\varkappa}{\mathfrak{w}_2}\right)\left(1 - \frac{\varkappa}{\bar{\mathfrak{w}}_2}\right) - 1 \tag{13}$$

die Gleichung derjenigen Punkte der z-Ebene, für welche W_2 den konstanten Wert

$$W_2 = \frac{\mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{e}}}{\mathfrak{a}_1\,\bar{\mathfrak{a}}_1} \cdot \frac{1}{2\varkappa} \tag{14}$$

hat. Wird $\varkappa$ als Parameter aufgefaßt, so wird durch (13) wieder ein Kreisbüschel ohne Schnittpunkte dargestellt. Die Mittelpunkte liegen auf einer Geraden MH (Bild 5) durch den Punkt -1, welche mit der reellen Achse den Winkel $-\psi_2$ bildet, denn für einen bestimmten Wert von $\varkappa$ ist der Mittelpunkt des entsprechenden Kreises $-1 + \frac{\varkappa}{|\mathfrak{w}_2|} \cdot e^{-i\psi_2}$. Der Koordinatenanfangspunkt hat in bezug auf alle Kreise des Büschels dieselbe Potenz 1. Der Einheitskreis um den Anfangspunkt schneidet also den Büschel orthogonal und dieser kann in analoger Weise konstruiert werden wie die ähnliche Kreisschar für $\mathfrak{B}_2 =$ konstant. Dabei gehen die Punkte -1 und H, in denen der Einheitskreis die Gerade MH schneidet, als Grenzpunkte hervor. In den Grenzpunkten sind die Radien der entsprechenden Kreise gleich 0. Die Achse BC der induktiven Belastung ist eine gemeinsame Potenzlinie und gehört selbst zur Schar mit dem Parameterwert $\varkappa$ gleich ∞. Für jeden Kreis des Büschels ist der zugehörige Wert von W_2 nach (14) dem Abstande des Mittelpunktes von M umgekehrt proportional. Die rechte Seite von (13) muß als Quadrat des Radius positiv sein. Demnach ist der kleinste positive Wert von $\varkappa$ gleich

$$\varkappa_{\min} = \mathfrak{w}_2 + \bar{\mathfrak{w}}_2, \tag{15}$$

und zwar gehört dieser Wert zu dem Grenzpunkt H oder $z = e^{-2i\psi_2}$, entspricht also einer Belastung

$$\mathfrak{Z}_2 = \bar{\mathfrak{w}}_2. \tag{16}$$

Hieraus ergibt sich der allgemeine Satz: Von einem an ein beliebiges Wechselstromnetz anzuschließenden Apparat wird die größtmögliche Leistung aufgenommen, wenn der Scheinwiderstand des Apparates gleich dem konjugierten Wert des an den unbelasteten Klemmen gemessenen Scheinwiderstandes des Netzes ist.

Für den besonderen Fall einer Fernleitung mit konstanter Anfangsspannung hat Rößler diesen Satz aufgestellt[1]). Den besonderen Voraussetzungen gemäß kommt in der Formel von Rößler anstatt $\mathfrak{w}_2$ die Kurzschlußcharakteristik der Leitung vor.

Als Maximalwert der sekundären Leistung ergibt sich nach (14) und (15)

$$W_{2\max} = \frac{\mathfrak{e}\,\bar{\mathfrak{e}}}{2\,\mathfrak{a}_1\,\bar{\mathfrak{a}}_1\,(\mathfrak{w}_2 + \bar{\mathfrak{w}}_2)} = \left|\frac{\mathfrak{e}}{\mathfrak{a}_1}\right|^2 \cdot \frac{1}{4\,|\mathfrak{w}_2|\cos\psi_2}. \tag{17}$$

In dem Bild 5 sind die Kurven für 0,9, 0,8, 0,7 ..... der Maximalleistung gezeichnet. Die Kurven der Schar, welche negativen Werten von $\varkappa$ entsprechen, sind gestrichelt. Diese liegen in der Halbebene BCM, deren Punkten erst dann eine physikalische Bedeutung zukommt, wenn man den Begriff des negativen Widerstandes einführt.

Führt man in Gleichung (13) $x + iy$ für z und $h = \frac{\mathfrak{w}_2 + \bar{\mathfrak{w}}_2}{\varkappa}$ als dritte rechtwinklige Koordinate ein, so erhält man die Gleichung einer Fläche, die von äqui-

[1]) Rößler, Fernleitung von Wechselströmen, 1905, S. 231.

distanten Horizontalebenen in den Kreisen des Bildes 5 geschnitten wird. Die xy-Ebene ist dabei als Horizontalebene betrachtet. Diese Fläche bildet in der Umgebung des Punktes H einen Gipfel, der desto steiler ist, je größer der absolute Betrag des Winkels ψ_2. Die Höhe h ist proportional der Sekundärleistung in dem betreffenden Punkte z. In dem Gipfelpunkt ist h = 1. Eine senkrechte, zur Achse BC parallele Ebene schneidet die Fläche in eine symmetrische Resonanzkurve.

Die Bilder 2, 3, 4, 5, welche die Vorgänge auf der Sekundärseite beschreiben, sind nur von dem Winkel ψ_2 des Scheinwiderstandes $\mathfrak{w}_2$ abhängig. Sobald dieser Winkel bestimmt ist, sind die Bilder vollständig festgelegt. Allerdings stellen sie nur relative Größen dar.

Beispiele.

Ein sehr einfaches Beispiel zur Verwendung der Gleichung (16) bietet ein gewöhnlicher Kondensatorkreis. Es sei in einem Wechselfeld eine Spule mit dem Ohmschen Widerstand R und dem Selbstinduktionskoeffizienten L gegeben, und zwar in solcher Lage relativ dem felderzeugenden Apparat, daß dieser bei Stromdurchgang der Spule keine merkliche Rückwirkung erleidet. Die Klemmen der Spule sollen mit einem Belastungswiderstand verbunden werden derart, daß die größtmögliche Leistung dem Felde entnommen wird. Ist ω die Kreisfrequenz, so soll nach Gleichung (16) der Scheinwiderstand der Belastung gleich $R - i\omega L$ sein, und dieser Bedingung wird z. B. durch einen Ohmschen Widerstand R in Reihe mit einem Kondensator von der Kapazität $\frac{1}{L\omega^2}$ genügt. Die Gleichung (16) drückt also für diesen Fall die Bedingungen der Abstimmung und der Gleichheit des inneren und äußeren Widerstandes aus.

In einer drahtlosen Schaltung für Sekundärempfang ungedämpfter Schwingungen sei die Eigenimpedanz des Primärkreises $\mathfrak{Z}_a = R_a + L_a i\omega + \frac{1}{C_a i\omega}$. Mit dem Primärkreis sei eine Sekundärspule mit der Eigenimpedanz $R_b + L_b i\omega = \mathfrak{Z}_b$ induktiv gekoppelt. Bedeutet M den gegenseitigen Induktionskoeffizienten, so ist der an den unbelasteten Klemmen der Sekundärspule gemessene Scheinwiderstand der Schaltung gleich

$$\mathfrak{w}_2 = \mathfrak{Z}_b + \frac{M^2\omega^2}{\mathfrak{Z}_a}.$$

Führt man die Verkürzungen

$$k^2 = \frac{M^2}{L_a \cdot L_b}; \qquad \xi L_a = L_a - \frac{1}{C_a\omega^2}$$

ein, so folgt hieraus nach einer leichten Zwischenrechnung

$$\mathfrak{w}_2 = \frac{-\omega^2(L_b R_a + \xi L_a R_b) + i\omega[R_a R_b + L_a L_b \omega^2(k^2 - \xi)]}{-\xi L_a \omega^2 + i\omega R_a}.$$

Ist insbesondere der Primärkreis auf den Sender abgestimmt, so verschwindet ξ. Soll nun aus dieser Schaltung mit einem Energiedetektor die bestmögliche Wirkung herausgeholt werden, so hat man nach (16) an den Klemmen der Sekundärspule einen Scheinwiderstand

$$\mathfrak{Z}_2 = R_b + \frac{L_a L_b k^2 \omega^2}{R_a} - i\omega L_b$$

anzuschließen, d. h. den Detektorwiderstand gleich $R_b + \frac{M^2\omega^2}{R_a}$ zu wählen und den Sekundärkreis mit einem Kondensator abzustimmen.

Wird eine lange Fernsprechleitung, an deren Anfang eine Klemmenspannung von bestimmter Frequenz wirksam ist, an eine zweite lange Leitung mit demselben



Wellenwiderstand $\mathfrak{W}$ angeschlossen, so schreitet die Energiewelle bekanntlich ohne Reflexion durch die Verbindungsstelle fort. Trotzdem wird nicht die größtmögliche Leistung auf die zweite Leitung übertragen. Diese nimmt vielmehr die Maximalleistung dann auf, wenn die beiden Leitungen über eine verlustfreie Spule verbunden werden, deren Induktivität nach (16) aus

$$\mathfrak{W} + i\,\omega\,L_s = \overline{\mathfrak{W}}$$

bestimmt ist. Der scheinbare Widerspruch erklärt sich daraus, daß die Leitungsverluste in der ersten Leitung durch die Reflektion an der Spule und durch Interferenz der Wellen verringert werden. Man hat also hier ein einfaches Beispiel einer vorteilhaft wirkenden Reflexion in einer langen Fernsprechleitung.

Wirkungsgrad.

Für die Starkstromtechnik kommt weniger die Maximalleistung als vielmehr ein günstiger Wirkungsgrad in Betracht. Der Wirkungsgrad ist unabhängig von den Eigenschaften des vor den Primärklemmen befindlichen Teiles des Netzes. Für die Berechnung desselben kann man daher auf die ursprünglichen Hauptgleichungen (1) zurückgreifen. Daraus und aus (4) und (5) folgt für die primäre Stromstärke

$$\mathfrak{J}_1 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{U}_{10}} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{U}_{20}}{\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{U}_{2k}} = \mathfrak{B}_1 \left[\frac{1}{\mathfrak{U}_{10}} + \mathfrak{U}_{2k}\left(\frac{1}{\mathfrak{U}_{1k}} - \frac{1}{\mathfrak{U}_{10}}\right) \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{U}_{2k}}\right].$$

Für den Sekundärstrom ergibt sich nach (1) und (4)

$$\mathfrak{J}_2 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1} \cdot \frac{1}{\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{U}_{2k}}$$

und für die Sekundärspannung

$$\mathfrak{B}_2 = \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{A}_1} \cdot \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{U}_{2k}}.$$

In dem Ausdruck für den Wirkungsgrad η fällt die nicht konstante Primärspannung $\mathfrak{B}_1$ heraus. Man hat

$$\eta = \frac{\mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{J}}_2 + \overline{\mathfrak{B}}_2 \mathfrak{J}_2}{\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{J}}_1 + \overline{\mathfrak{B}}_1 \mathfrak{J}_1} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}}_1 \cdot c}. \tag{18}$$

$$c = \frac{1}{\mathfrak{Z}_2 + \overline{\mathfrak{Z}}_2}\left[\left(\frac{1}{\mathfrak{U}_{10}} + \frac{1}{\overline{\mathfrak{U}}_{10}}\right)\left(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{U}_{2k}\right)\left(\overline{\mathfrak{Z}}_2 + \overline{\mathfrak{U}}_{2k}\right) + \right.$$
$$\left. + \mathfrak{U}_{2k}\left(\frac{1}{\mathfrak{U}_{1k}} - \frac{1}{\mathfrak{U}_{10}}\right)\left(\overline{\mathfrak{Z}}_2 + \overline{\mathfrak{U}}_{2k}\right) + \overline{\mathfrak{U}}_{2k}\left(\frac{1}{\overline{\mathfrak{U}}_{1k}} - \frac{1}{\overline{\mathfrak{U}}_{10}}\right)\left(\mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{U}_{2k}\right)\right].$$

Wir führen die folgenden Verkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \frac{1}{\mathfrak{U}_{10}} + \frac{1}{\overline{\mathfrak{U}}_{10}} = \frac{2\cos\varphi_{10}}{|\mathfrak{U}_{10}|}; \quad \mathfrak{U} = \frac{\mathfrak{U}_{2k}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\mathfrak{U}_{1k}} + \frac{1}{\overline{\mathfrak{U}}_{1k}}} = e^{i\varphi_{2k}} \cdot \sqrt{|\mathfrak{U}_{2k}| \cdot |\mathfrak{U}_{20}| \cdot \frac{\cos\varphi_{1k}}{\cos\varphi_{10}}} \\ &\zeta = \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{U}}; \quad a = \frac{|\mathfrak{U}_{10}|}{|\mathfrak{U}_{1k}|} = \frac{|\mathfrak{U}_{20}|}{|\mathfrak{U}_{2k}|}; \quad \mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{U}_{2k}}{\alpha\,\mathfrak{U}}\left(\frac{1}{\mathfrak{U}_{1k}} + \frac{1}{\overline{\mathfrak{U}}_{10}}\right) = \frac{a \cdot e^{-i\varphi_{1k}} + e^{i\varphi_{10}}}{2\sqrt{a \cdot \cos\varphi_{10} \cdot \cos\varphi_{1k}}} \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

φ_{10} und φ_{1k} sind die Phasenwinkel von $\mathfrak{U}_{10}$ und $\mathfrak{U}_{1k}$. Aus dem Ausdruck für c folgt dann unter Beachtung der Gleichung (5) nach kurzer Zwischenrechnung

$$\left(\zeta + \mathfrak{p} - \frac{c}{\alpha\,\mathfrak{U}}\right) \cdot \left(\overline{\zeta} + \overline{\mathfrak{p}} - \frac{c}{\alpha\,\overline{\mathfrak{U}}}\right) = \left(\mathfrak{p} - \frac{c}{\alpha\,\mathfrak{U}}\right)\left(\overline{\mathfrak{p}} - \frac{c}{\alpha\,\overline{\mathfrak{U}}}\right) - 1. \tag{20}$$

Diese Gleichung definiert in der komplexen ζ-Ebene Kurven für konstanten Wirkungsgrad. Dieselben bilden einen ähnlichen Kreisbüschel wie die Kurven der Gleichung (13). Die Mittelpunkte liegen auf einer Geraden durch den Punkt P $(-\mathfrak{p})$, Bild 6, welche mit der reellen Achse den Winkel $-\varphi_{2k}$ bildet, wenn φ_{2k} den Phasenwinkel von $\mathfrak{U}_{2k}$ und also von $\mathfrak{U}$ bedeutet. Der Koordinatenanfangspunkt $\zeta = 0$ hat in be-

zug auf sämtliche Kreise des Büschels die Potenz 1. Die Kreisschar läßt sich in oben beschriebener Weise konstruieren, indem man von den Punkten der Mittelpunktsgeraden die Tangenten an den Einheitskreis zieht und die Tangentenabschnitte als Radien benutzt. Die Schnittpunkte M_1 und H_1 des Einheitskreises mit der Mittelpunktsgeraden sind die Grenzpunkte der Schar, in denen die Radien gleich 0 werden. Den Punkten der Strecke $M_1 H_1$ entsprechen offenbar imaginäre Werte der Radien. Der kleinste positive Wert von c, der in Betracht kommt, ist

$$c_{min} = \alpha \cdot |\mathfrak{U}| \cdot H_1 P.$$

In dem Grenzpunkt H_1 hat der Wirkungsgrad somit seinen größten Betrag. Auf dem Bild 6 sind die Kurven für 0,9, 0,8.... des Höchstwirkungsgrades gezeichnet, indem die Abstände der Kreismittelpunkte von P gleich $H_1 P : 0{,}9$ usw. gewählt worden sind. Die Lage des Punktes $\mathfrak{p}$ kann, je nach der Art der Energieübertragung, sehr verschieden sein. Für eine lange Fernsprechleitung ist $\mathfrak{p}$ sehr nahe gleich 1. In der Tat fällt das Diagramm des Wirkungsgrades dann mit dem Diagramm der Sekundärleistung (Bild 5) zusammen. Bei einem Transformator hingegen ist $\mathfrak{p}$ ziemlich groß gegen 1.

Bild 6. Kurven für konstanten Wirkungsgrad.

Um den Abstand ON der Geraden PH_1 von dem Anfangspunkt zu bestimmen, kann man folgendermaßen verfahren: Bezeichnet man die Grenzpunkte H_1 und M_1 mit ζ' bzw. ζ'', so ist N gleich $\frac{\zeta' + \zeta''}{2}$. Die den Grenzpunkten entsprechenden Werte c' und c'' von c ergeben sich als Wurzeln, wenn die rechte Seite von (20) gleich 0 gesetzt wird. Aus (20) folgt nun

$$\zeta' + \zeta'' + 2\mathfrak{p} - \frac{c' + c''}{\alpha \mathfrak{U}} = 0.$$

$$c' + c'' = \alpha (\mathfrak{p}\mathfrak{U} + \bar{\mathfrak{p}}\bar{\mathfrak{U}}).$$

$$\frac{\zeta' + \zeta''}{2} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-i\varphi_{2k}} \left(\mathfrak{p} \cdot e^{i\varphi_{2k}} - \bar{\mathfrak{p}} \cdot e^{-i\varphi_{2k}}\right) = e^{-i\left(\varphi_{2k} + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{a \sin(\varphi_{2k} - \varphi_{1k}) + \sin(\varphi_{10} + \varphi_{2k})}{2\sqrt{a} \cdot \cos\varphi_{10} \cdot \cos \cdot \varphi_{1k}}.$$

Der absolute Betrag des letzten Ausdruckes ist gleich der Länge ON und der mit -1 multiplizierte Betrag ist gleich dem Sinus des Winkels desjenigen Belastungswiderstandes $\mathfrak{Z}_2$, welcher den Höchstwirkungsgrad ergibt. Der Absolutwert dieser Belastung ist nach (19) (vgl. Bild 6)

$$|\mathfrak{Z}_{2\,opt.}| = |\mathfrak{U}| = \sqrt{|\mathfrak{U}_{2k}|\,|\mathfrak{U}_{20}|\,\frac{\cos\varphi_{1k}}{\cos\varphi_{10}}}.$$

Für eine symmetrische Energieübertragung gehen die beiden letzten Ausdrücke in die von Rößler[1]) für den Höchstwirkungsgrad einer Fernleitung aufgestellten Bedingungsformeln über.

Zusammenfassung.

Die Arbeit bezieht sich auf elektrische Energieübertragungen allgemeiner Art (Transformatoren, Fernleitungen usw.), für welche die Hauptgleichungen (1) und (2)

[1]) Rößler, a. a. O.

gültig sind. Eine solche Energieübertragung kann auf einen Stromkreis mit konstanter Primärspannung zurückgeführt werden. Dadurch ist es möglich, auch viele Probleme der Fernsprechtechnik und naheliegender Gebiete nach ähnlichen Methoden zu behandeln, wie sie in der Starkstromtechnik üblich sind. Auf Grund dieser Überlegungen werden einige Wechselstromdiagramme von allgemeinem Charakter aufgestellt. Um die veränderlichen Größen der Sekundärseite in Abhängigkeit der Belastung so allgemein als möglich darzustellen, wird als unabhängige Veränderliche der Quotient $z = \frac{\mathfrak{Z}_2}{\mathfrak{w}_2}$ eingeführt, wo $\mathfrak{Z}_2$ den Belastungswiderstand und $\mathfrak{w}_2$ den an den unbelasteten Sekundärklemmen gemessenen Scheinwiderstand bedeuten. Die Veränderliche z wird in einer komplexen Ebene gedeutet, in welcher die Kurvenscharen konstanter sekundärer Stromstärke, Spannung und Leistung konstruiert werden. Die so entstehenden Bilder hängen nur von einer einzigen Größe ab, und zwar von dem Phasenwinkel des Scheinwiderstandes $\mathfrak{w}_2$. Sobald dieser Winkel gegeben ist, sind die Bilder vollständig bestimmt. Es ergibt sich aus den Entwickelungen ein allgemeiner Satz über die Anpassung eines Wechselstromapparates, welcher die größtmögliche Leistung aufnehmen soll.

Schließlich wird der Wirkungsgrad berechnet und Kurven für konstanten Wirkungsgrad konstruiert.

Die Verwendung des magnetischen Spannungsmessers in der Kompensationsschaltung.

Von

Viktor Engelhardt.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Der von Rogowski und Steinhaus[1]) angegebene magnetische Spannungsmesser besteht aus einem flachen, biegsamen Preßspan- oder Zelluloidstreifen von möglichst konstantem Querschnitt, welcher dicht und gleichmäßig mit dünnem, isolierten Draht bewickelt ist. Der Fluß durch eine solche Spule ist proportional der magnetischen Spannung zwischen Anfang und Ende der Spule, wobei der Weg, für den diese Spannung gilt, durch die Achse der Spule gegeben ist. Die Messung des die Spule durchsetzenden Flusses geschieht auf elektrischem Wege. Wird das Feld durch Gleichstrom erzeugt, so bestimmt man die beim Einschalten oder Kommutieren des erregenden Stromes im Spannungsmesser auftretende Elektrizitätsmenge, welche den entstehenden Amperewindungen proportional ist, mit dem ballistischen Galvanometer. Handelt es sich um die Untersuchung einer magnetischen Wechselspannung, so muß man die im Spannungsmesser auftretende elektrische Wechselspannung messen. Diese ist sehr klein. Wird dem Spannungsmesser Strom entnommen, so ist außerdem die Auswertung der Ergebnisse ziemlich kompliziert. So kommt für die Spannungsmessung außer der unbequemen Anwendung des Spiegelelektrometers mit Hilfsspannung nur ein Kompensationsverfahren unter Benutzung des Vibrationsgalvanometers als Nullinstrument in Betracht. Ein solches wurde von Alberti und Vieweg[2]) bei der Messung des Magnetisierungsstromes von Stromwandlern mit

[1]) Arch. f. Elektrotechnik 1, S. 141, 1912

[2]) Arch. f. Elektrotechnik 2, S. 208, 1913.

Hilfe des magnetischen Spannungsmessers benutzt. Sie entnahmen die zur Kompensation nötige Hilfsspannung der zweiten Maschine eines Doppelgenerators, an dessen erste Maschine der Stromwandler angeschlossen war, und bestimmten den Phasenwinkel zwischen der Hilfsspannung und dem felderregenden Strom mit dem Wattmeter. Das Verfahren setzt demnach besondere maschinelle Einrichtungen voraus, wie sie nicht überall vorhanden sind. Auch wird die Kompensation durch Schwankungen des felderregenden Stromes gestört.

Da der Spannungsmesser in Verbindung mit der felderzeugenden Spule der Sekundärspule einer gegenseitigen Induktivität sehr ähnlich ist, regte Herr Prof. Schering an, die von ihm angegebene Schaltung[1]) zur Messung gegenseitiger Induktivitäten auf die Messung mit dem magnetischen Spannungsmesser zu übertragen.

Im einfachsten Fall umschlingt der Spannungsmesser (Bild 1) eine Spule W bekannter Windungszahl (N), welche vom Strom J durchflossen wird. Am Spannungsmesser M tritt in diesem Fall eine elektrische Spannung

$$E_M = \omega \cdot K \cdot N \cdot J$$

auf, welche um 90° hinter dem Strom J zurückbleibt. K ist eine von der Windungsfläche des Spannungsmessers abhängige Konstante.

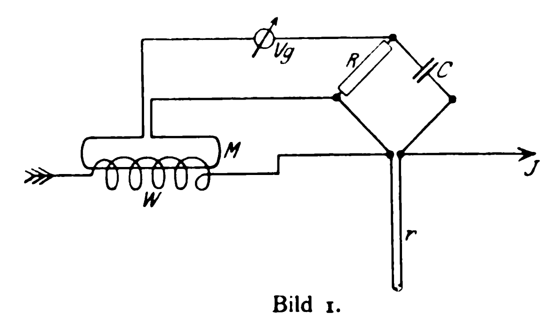


Bild 1.

Der Strom J durchfließt weiterhin den induktionsfreien Widerstand r und erzeugt in ihm die ihm phasengleiche Spannung

$$E_r = J \cdot r.$$

Parallel zu dem kleinen Widerstand r liegt die Kapazität C. Da der Strom, welcher sie durchfließt, der Spannung r um 90° voreilt, kann die Spannung, welche an dem der Kapazität vorgeschalteten Widerstand R auftritt, zur Kompensation von E_M verwendet werden. Die Spannung an R ist:

$$E_R = \frac{J \cdot r}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot R.$$

Bei Stromlosigkeit des Vibrationsgalvanometers Vg ist dann

$$\omega K \cdot n = \frac{r}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot R.$$

Die Stromstärke fällt also heraus und Schwankungen der Stromstärke gehen in die Messung nicht ein. Dem Spannungsmesser selbst wird kein Strom entnommen.

Damit die Phasenverschiebung zwischen E_R und E_r praktisch = 90° wird, muß

$$R << \frac{1}{\omega C}$$

sein. Obige Formel vereinfacht sich dann und es wird

$$K \cdot N = r \cdot R \cdot C.$$

Die Versuchsanordnung kann also zur bequemen Bestimmung der Konstanten des Spannungsmessers dienen. Es ist

$$K = \frac{r \cdot R \cdot C}{N}.$$

[1]) Schering und Engelhardt, Tätigkeitsber. der PTR für 1919, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 40, 122, 1920.

Die Versuche wurden mit dem von Alberti und Vieweg[1]) hergestellten Spannungsmesser ausgeführt, welchen die genannten Herren in dankenswerterweise zur Verfügung stellten. Der Spannungsmesser bestand aus einem Zelluloidband von 60 cm Länge und 1 × 13,8 mm Querschnitt. Das Band war mit zwei Lagen Kupferdraht von 0,1 mm Ø bewickelt. Der Widerstand betrug 426 Ohm.

Zur Eichung des Spannungsmessers wurde eine einfache Drahtschleife benutzt, die der Spannungsmesser zweimal umschlang. Die Ergebnisse waren folgende:

1. Eichung des Spannungsmessers.

$r = 0{,}2002$ Ohm; $C = 0{,}0996_8\ \mu F$; Frequenz = 50 per/s.

Stromstärke in der Schleife in Ampere	Ampere-Windungen	R in Ohm	K
1	1	32	$0{,}63 \cdot 10^{-6}$
2	2	32	$0{,}63 \cdot 10^{-6}$
10	10	$32{,}0 \pm 0{,}1$	$0{,}63_6 \cdot 10^{-6}$

Die Tabelle zeigt, daß 10 AW auf etwa 3‰ genau gemessen werden können, daß der vorliegende Spannungsmesser also einige Hundertstel AW zu messen gestattet.

Der geeichte Spannungsmesser stellt demnach ein bequemes Hilfsmittel dar, um die Windungszahl von Spulen zu messen und um Spulen von bekannter Windungszahl auf Kurzschlußwindungen zu untersuchen. Der Kurzschluß würde sich auch durch die von 90° abweichende Phasenverschiebung bemerkbar machen.

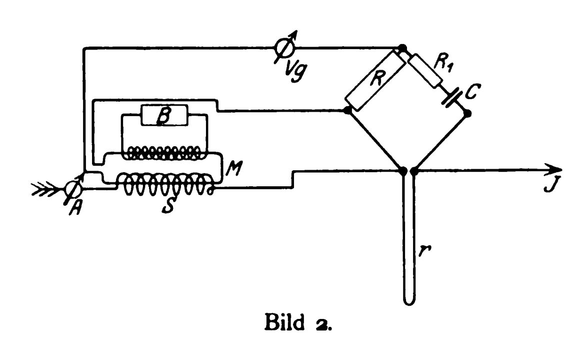


Bild 2.

Soll nun mit dem Spannungsmesser eine durch den Strom J erzeugte magnetische Spannung von F (J) AW und einer Phasenverschiebung δ gemessen werden, so muß zwischen R und C noch ein variabler Widerstand R_1 eingeschaltet werden (Bild 2), um die auftretende Phasenverschiebung zu kompensieren. Die im Spannungsmesser zu kompensierende elektrische Spannung ist dann:

$$\omega \cdot K \cdot F(J) = \frac{J \cdot r \cdot R}{(R + R_1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \varphi}},$$

wobei

$$\mathrm{tg}\, \varphi = \mathrm{cotg}\, \delta = \frac{1}{(R + R_1)\, \omega C}$$

oder

$$\frac{F(J)}{J} = \frac{1}{\omega K} \cdot \frac{r \cdot R}{(R + R_1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \varphi}}.$$

Als Beispiel wurden die von Alberti und Vieweg[2]) an Stromwandlern mit Hilfe von Wattmeter, Doppelmaschine und Spannungsmesser ausgeführten Messungen

[1]) Alberti und Vieweg, Arch. f. Elektrotechnik 2, 1913, S. 208.
[2]) Archiv für Elektrotechnik 2, 1913, S. 208.

des Magnetisierungsstromes J_0 mit der in Bild 2 wiedergegebenen Schaltung ausgeführt.

S stellt den zu untersuchenden Stromwandler mit der sekundären Bürde B dar, durch dessen primäre und sekundäre Spule der Spannungsmesser M zweimal hindurchgeschlungen war. Die im Spannungsmesser auftretende EMK E_M ist dann proportional der geometrischen Differenz der primären und sekundären A-Windungen, d. h. proportional der resultierenden Durchflutung $n_1 J_0$ und steht senkrecht auf ihr (Bild 3.) Sie wird durch die an R auftretende Spannung E_R kompensiert. $\varphi = 90 - \delta$ ist der Winkel zwischen der Spannung E_R und der Stromstärke J_1, welche r durchfließt, δ der Winkel zwischen Primärstrom und Magnetisierungsstrom.

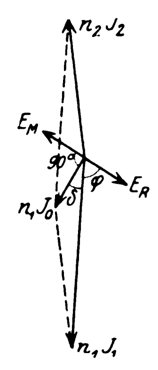


Bild 3.

Der Wandler hatte ein Übersetzungsverhältnis von 10/5 A und 60 Primärwindungen Die primäre Stromstärke J_1 wurde mit dem Amperemeter A eingestellt und die Frequenz mit der Stimmgabel[1]) reguliert. Da der Magnetisierungsstrom durch Spuren von remanentem Magnetismus stark beeinflußt wird, wurde beim Einschalten die Stromstärke von sehr kleinen Werten an ganz langsam gesteigert und nach jedem Ausschalten wurde neu entmagnetisiert. Die resultierende Durchflutung $n_1 J_0$ ergibt sich nach obiger Formel zu:

$$n_1 J_0 = \frac{J_1}{\omega K} \cdot \frac{r \cdot R}{R + R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \varphi}}$$

und

$$tg\, \varphi = cotg\, \delta = \frac{1}{(R + R_1)\, \omega\, C}$$

2. Magnetisierungstrom eines Stromwandlers 10/5 A

r = 0,2002 Ohm; C = 0,0996₃ μF; Frequenz = 50 per/s.

Primäre Stromstärke J_1 in Ampere	Sekundäre Bürde	R in Ohm	R_1 in Ohm	Magnetisierungsstrom J_0 in Milliampere	$tg\,\varphi = cotg\,\delta$	δ
10	0 Ohm	17	$2{,}4 \cdot 10^4$	$71{,}_0$	$1{,}3_3$	37° 0′
10	0,2 „	31	$3{,}4 \cdot$ „	$110{,}_7$	$0{,}9_4$	46° 50′
10	0,5 „	44	$3{,}6 \cdot$ „	$152{,}_2$	$0{,}8_9$	48° 20′
10	1,0 „	60	$3{,}5 \cdot$ „	$210{,}_8$	$0{,}9_1$	47° 40′
2,5	0,6 Ohm	130	$6{,}0 \cdot 10^4$	$79{,}_0$	$0{,}5_3$	62° 0′
5,0	0,6 „	87	$5{,}2 \cdot$ „	$118{,}_9$	$0{,}6_1$	58° 40′
10,0	0,6 „	50	$3{,}7 \cdot$ „	$171{,}_0$	$0{,}8_6$	49° 20′
10	15 VA $\cos\varphi = 0{,}8$	32,5	$0{,}8_0 \cdot 10^4$	$164{,}_5$	$3{,}9_8$	14° 10′

Bei einer sekundären Bürde von 15 VA, $\cos\varphi = 0{,}5$ wurde der Winkel δ negativ. In diesem Fall mußte parallel zu r eine Widerstandsunterteilung $r_1\, r_2$ geschaltet werden, an deren Teilpunkt der Spannungsmesser angeschlossen wurde (Bild 4). Der Widerstand R_1 ist dann nicht mehr nötig. Unter der zutreffenden

[1]) Schering und Engelhardt, Tätigkeitsbericht d. PTR für 1918. Zeitschr. für Instrumentenk. 39, 1919, 139.

Annahme, daß

$$R^2 << \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2 \text{ und } r_1 << r_2,$$

ergibt sich:

$$n_1 J_0 = \frac{J_1 \cdot r}{\omega K} \cdot \sqrt{(R \omega C)^2 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

und

$$\cos \delta = \frac{R \omega C}{\sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + (R \omega C)^2}}.$$

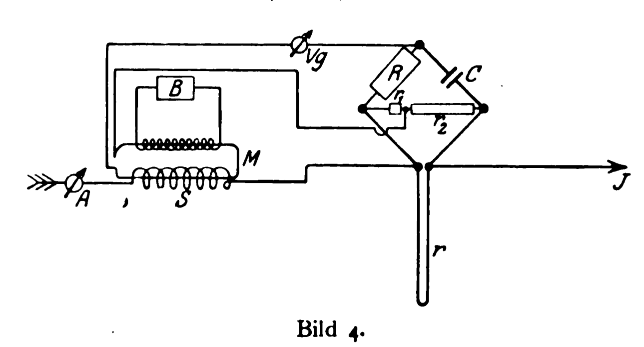


Bild 4.

Die Messungsergebnisse waren folgende:

3. Magnetisierungsstrom des Stromwandlers bei negativem Winkel zwischen Primärstrom und Magnetisierungsstrom.

$r = 0{,}2002$ Ohm; $r_2 = 10000$ Ohm; $C = 0{,}09963\ \mu F$; Frequenz = 50 per/s.

Primäre Stromstärke J_1 in Ampere	Sekundäre Bürde	r_1 in Ohm	R in Ohm	J_0 in Milliampere	$tg\,\varphi = cotg\,\delta$	δ
10	15 VA cos φ = 0,5	0,9	31	162,4	— 11,1	— 5° 10′

Es ist zu bemerken, daß die Kompensationsmethode nur die Grundschwingung des magnetischen Wechselflusses im Verhältnis zur Grundschwingung des erregenden Wechselstromes zu messen gestattet, da das Vibrationsgalvanometer für diese selektive Empfindlichkeit besitzt. Diese Selektivität ist aber für die meisten Zwecke gerade erwünscht.



Archiv für Elektrotechnik

XI. Band. 6. Heft. 1922.

Berechnung der Eigenschwingungen der doppellagigen langen Spule.

Von

Werner Schröder.

1. Einleitung.

Die Frage nach den Eigenschwingungen einer Spule ist zu einem wichtigen Problem der Starkstromtechnik geworden, seitdem man ihren Zusammenhang mit den häufig bei Einschaltvorgängen beobachteten Überspannungen erkannt hat. Die zur Klärung dieser Erscheinungen angestellten Untersuchungen haben ergeben, daß eine Spule möglicherweise dann in Spannungsgefahr geraten kann, wenn die Frequenz der beim Ausgleichvorgang entstehenden Wanderwellen mit gewissen Eigenfrequenzen der Spule übereinstimmen. In diesem Zusammenhange ist die Frage nach den Eigenfrequenzen einer Spule von technischer Seite in einer Reihe von Arbeiten auf die verschiedenste Weise behandelt und diskutiert worden. Wagner[1]) z. B. ersetzt die einzelnen Spulenwindungen durch eine konzentrierte Windungskapazität und -induktivität. Indem er weiter je zwei benachbarte Windungen untereinander durch eine Gegeninduktivität und mit der Erde durch eine Erdkapazität verbindet, erhält er als Ersatzschema der Spule den sog. Kettenleiter. Für diesen kann er eine Reihe Eigenfrequenzen ableiten, die einer oberen Grenze, der kritischen Frequenz, zustreben. Ist die aufgedrückte Frequenz gleich der kritischen, so hat der Spannungsgradient am Anfang der Spule ein Maximum. Zu ähnlichen Ergebnissen kommt Böhm[2]). Seine Rechnungen ergeben ebenfalls eine kritische Frequenz, führen aber im Gegensatz zu denen Wagners zu dem Schluß, daß auch noch oberhalb jener kritischen Frequenz Eigenschwingungen liegen können.

Von einer anderen Seite hat Rogowski[3]) das Problem in Angriff genommen. Er leitet die Eigenschaften der Spule aus einem System von geeignet angeordneten Doppelleitungen ab und findet dabei zwei physikalisch streng voneinander geschiedene Gruppen von Eigenschwingungen, die er Eigenfrequenzen erster und zweiter Art nennt. Nur bei denen zweiter Art können nach seiner Ansicht Überspannungen auftreten. Eine kritische Frequenz ist nicht vorhanden.

Diese Ergebnisse stehen im Einklang mit der Theorie von Lenz[4]). Die der strengen Behandlung des Spulenproblems innewohnenden mathematischen Schwierigkeiten vermindert er weitgehend dadurch, daß er einerseits den Wicklungsquerschnitt der kurzen Spule als Ellipse auffaßt und andrerseits die lange Spule als Ausschnitt aus einer unendlich langen betrachtet. Die rechnerische Durchführung ergibt dann eine Grund- und zwei Gruppen von Oberschwingungen, die, wie Rogowski[5]) zeigt, mit dessen Eigenfrequenzen erster und zweiter Art identisch sind. Experimentell sind diese von Gothe[6]) [vgl. auch Geis[7]), Ridder[8])] nachgewiesen

[1]) Arch. f. El. VI, S. 301.
[2]) Arch. f. El. V, S. 408 u. IX, S. 341.
[3]) Arch. f. El. S. 17, S. 244.
[4]) Ann. d. Phys. 43, S. 749, im folgenden mit L zitiert.
[5]) Arch. f. El. VII, S. 255.
[6]) Arch. f. El. IX, S 1.
[7]) Frankfurter Inauguraldissertation 1921.
[8]) Arch. f. El. X.

worden. Eine kritische Frequenz aber, in deren Vorhandensein Wagner eine charakteristische Eigenschaft der Spule erblickt, wurde in keinem Falle gefunden. Man beachte übrigens hinsichtlich der Wagnerschen Auffassung die Bemerkung von Kruithof[1]).

In der vorliegenden Untersuchung ist der Versuch gemacht, die Lenzsche Eigenschwingungstheorie auf zweilagige Spulen auszudehnen. Sie wurde auf Anregung von Herrn Prof. Lenz unternommen und durch seine rege Anteilnahme wie durch seinen stets gern gewährten Rat gefördert. Ich möchte nicht versäumen, ihm dafür meinen ergebensten Dank auszusprechen.

2. Methoden und Ergebnisse.

Um das Problem der rechnerischen Behandlung zugänglich zu machen, wird im folgenden zunächst statt der wirklichen Spule ein Ersatzgebilde, bestehend aus zwei koachsialen unendlich langen Kreiszylindern, behandelt. Für dies System läßt sich Potential und Wirbelkraft und damit das gesamte elektrische Feld angeben. Zur Berechnung der in den Lösungsansätzen (9) und (12) noch unbekannten Koeffizienten stehen uns die Grenzbedingungen (13), (18), (19), (32), (33) zur Verfügung, die den für einlagige Spulen aufgestellten entsprechen. Ihre Benutzung führt zu dem in den Koeffizienten homogenen Gleichungssystem (35) und dessen Auflösung zu der in ν bzw. in λ biquadratischen Gleichung (36). Diese läßt sich unter der Annahme, daß der Lagenabstand klein gegen den Spulenradius ist, weitgehend vereinfachen und liefert schließlich die gesuchte Grundschwingung (39), nämlich

$$\lambda_1 = 2\,L \sqrt{\frac{i\,\pi\,R}{d}\,J_1(i\,\alpha)\,H_1^{(1)}(i\,\alpha)}.$$

Des weiteren wird gezeigt, daß diese Formel auf wirkliche Spulen angewandt nur dann richtige Werte für λ liefern wird, wenn der Spulenradius klein im Vergleich zur Spulenlänge ist und wenn man statt des Abstandes $2\,d$ der Kreiszylinder die Größe $2\,d'$ gemäß der Gleichung (46) eingeführt, die sich aus der Forderung ergibt, daß die Kapazität des Ersatzgebildes gleich der Spulenkapazität sei.

Zur Berechnung der Spulenkapazität bedarf es der Kenntnis des Spulenpotentials. Da wir aber die Potentialwerte nur in unmittelbarer Nähe der Windungen zu kennen brauchen, so können wir den Spulenradius unendlich setzen, mit andern Worten das Problem als zweidimensionales behandeln: Gegeben sind zwei parallele unendlich ausgedehnte Drahtgitter, welches Potential herrscht auf ihnen? Die zwecks Lösung befolgte Methode besteht darin, daß in die Achsen der Drähte elektrisch geladene Linien, sogenannte Pol- und Dipollinien in geeigneter Weise angeordnet und deren Potentialbeiträge summiert werden. Dies Verfahren wird zunächst an dem Fall der Doppelleitung ausgebildet und seine Brauchbarkeit durch Vergleich mit der bekannten strengen Lösung sichergestellt. Die dabei erreichte Genauigkeit beträgt bei den durchgerechneten Beispielen 1 bis 4 ‰.

Die Berechnung des Gitterpotentials bietet nun keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr. Faßt man nämlich die beiden Drahtgitter als ein System von über- bzw. untereinander angeordneten Doppelleitungen auf, so ergibt sich das Gitterpotential K als Summe der den einzelnen Doppelleitungen zukommenden Potentialbeiträgen. Die Ausführung der Summation führt auf sogenannte Lenzsche Gitterfunktionen und liefert schließlich die allgemeine Lösung (84).

Die wirkliche numerische Berechnung von K erfordert ein unerwünschtes Maß von Rechenarbeit. Im Interesse einer möglichst bequemen Verwendbarkeit der Frequenzformel (47) wird deshalb für die praktisch vorkommenden Spulendimensionen das Gitterpotential berechnet, in Tabelle 15 zusammengestellt und in Bild 16

[1]) Arch. f. El. XI, S. 77.

graphisch dargestellt. Aus ihr läßt sich K durch Interpolation ermitteln, wenn man es nicht vorzieht, die Näherungsformel (100) zu benutzen, die auf etwa 1 % genaue Werte liefert.

Damit sind wir in der Lage mit Hilfe (46) den gesuchten Korrektionswert 2 d′ bequem angeben zu können. Unsere endgültige Frequenzformel lautet dann:

$$\lambda = 2\,L \sqrt{\frac{i\,\pi\,R}{d'}\,J_1(i\,\alpha)\,H_1^{(1)}(i\,\alpha)}.$$

und ist anwendbar auf im Vergleich zum Spulenradius lange Spulen. Schließlich wird die Formel an Messungen von Ridder geprüft.

3. Das Eigenfrequenzspektrum der idealisierten Spule.

Um den Vergleich mit der Lenzschen Theorie zu erleichtern, sind die in der oben zitierten Arbeit gewählten Bezeichnungen nach Möglichkeit auch hier benutzt worden. In der Hauptsache sind es folgende:

ν = Schwingungszahl in 2π Sekunden,
λ = Wellenlänge im Äther,
$L_{1,2}$ = gesamte Drahtlänge der unteren bzw. oberen Spulenlage,
$2\,R_{1,2}$ = Durchmesser der unteren bzw. oberen Spulenlage,
$2\,r$ = Drahtdurchmesser,
$2\,l$ = Länge der Spule,
h = Ganghöhe (Abstand zweier Windungen),
$2\,d$ = Abstand der oberen Wicklung von der unteren,
c = Lichtgeschwindigkeit.

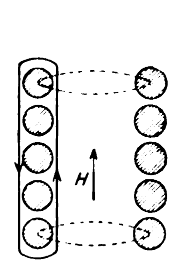


Bild 1. Integrationsweg zur Berechnung von Λ.

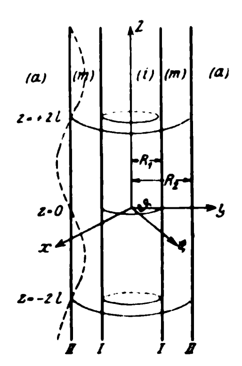


Bild 2. Ausschnitt aus der unendlich langen Spule.

Bevor wir die Lenzsche Methode zur Berechnung der Eigenfrequenzen auf die zweilagige Spule anwenden, dürfte es angebracht erscheinen, einen Überblick über die zu erwartenden Erscheinungen mit Hilfe der Thomsonschen Schwingungsformel

$$\lambda = 2\,\pi\,c\sqrt{\Lambda\,C} \qquad (1)$$

zu gewinnen. Daß es sich dabei nur um eine erste Orientierung handeln kann, wird nicht zweifelhaft sein, da die Spule sicher nicht, wie es die Anwendung der Formel (1) zur Voraussetzung hat, ein System mit konzentrierter Kapazität und Induktivität darstellt. Da der Strom J in beiden Wicklungen unserer zweilagigen Spule von der Länge $2\,l$ und dem Querschnittsradius R in gleicher Richtung fließt, so wird das Magnetfeld und damit die Selbstinduktion gegenüber der einlagigen Spule nicht erheblich geändert sein. Indem wir deshalb letztere zur Berechnung von Λ zugrunde legen, bilden wir das Linienintegral der magnetischen Kraft über einen der Spulenachse parallelen, die Wicklung eng umschließenden Integrationsweg

(Bild 1). Da das Magnetfeld auf das Innere der Spule beschränkt ist und hier den konstanten Betrag H hat, so liefert die erste Maxwellsche Gleichung

$$H \cdot 2l = 4\pi N \cdot J,$$

falls N die Anzahl der Windungen bedeutet. Führen wir die Länge des aufgewickelten Drahtes mit $L = 2\pi R \cdot N$ ein, so ergibt sich

$$H = \frac{L}{R \cdot l} \cdot J.$$

Setzen wir weiter die magnetische Energie der Spule:

$$W_m = \frac{1}{8\pi} \int\limits_{\substack{\text{Volumen}\\ \text{der Spule}}} H^2 \, dV = \frac{L^2}{8l} \cdot J^2$$

in der üblichen Weise gleich $\frac{1}{2} \Lambda J^2$, so folgt für die Selbstinduktion Λ der Spule:

$$\Lambda = \frac{L^2}{4l}. \tag{2}$$

Zur Berechnung der Kapazität fassen wir die zweilagige Spule als Plattenkondensator mit der Fläche $F = 2\pi R \cdot 2l$ (= Zylindermantel) auf. Seine Kapazität ist, wenn 2 d den Abstand der oberen Wicklung von der unteren angibt:

$$C = \frac{R \cdot l}{2d \cdot c^2}. \tag{3}$$

Damit folgt aus (1) für die Grundwelle:

$$\lambda_1 = \pi \cdot L \sqrt{\frac{R}{2d}}. \tag{4}$$

Da in den praktisch vorkommenden Fällen $d \ll R$ ist, so werden wir für die zweilagige Spule weit größere Wellen zu erwarten haben, als für die einlagige berechnet und beobachtet sind. Daß (4) die Schwingungserscheinungen an der zweilagigen Spule qualitativ richtig wiedergibt, zeigt die genauere Durchrechnung, der wir uns jetzt zuwenden wollen.

Die gute Übereinstimmung der Lenzschen Theorie mit der Erfahrung läßt es angebracht erscheinen, die zweilagige Spule in ganz derselben Weise zu idealisieren, wie Lenz die einlagige. Wir können dann nicht nur die dort benutzte Methode mühelos auf den vorliegenden Fall übertragen, sondern auch alle Grenzbedingungen des Potentials und der Wirbelkraft [vgl. L. Formel (3), (12), (36), (40)] hinübernehmen. Wir denken uns also die zweilagige Spule als Ausschnitt aus einer unendlich langen, auf der sich stehende Wellen mit dem Knotenabstand 2l ausgebildet haben mögen (Bild 2). Damit Ausschnitt und Spule bezüglich des Schwingungszustandes wirklich kongruent sind, müssen wir den Ausschnitt so wählen, daß an dessen Enden, d. h. bei $z = 0, \pm 2l$ Stromknoten und in dessen Mitte ein Strombauch liegt. Weiter nehmen wir eine so große Windungszahl und so dichte Wicklung an, daß die obere und untere Spulenlage in zwei koaxiale Kreiszylinder übergehen, auf denen die frühere Lage der Windungen jedoch erkennbar bleiben soll.

Das elektrische Feld läßt sich bei quasistalitionärer Behandlung in zwei Teile spalten, in den Potentialanteil φ und den Wirbelkraftanteil $\mathfrak{K}$ gemäß der Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \mathfrak{K} + \operatorname{grad} \varphi \\ \operatorname{div} \mathfrak{K} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Potential und Wirbelkraft genügen den bekannten Differentialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \varphi &= -4\pi e \\ \Delta \mathfrak{K} &= 4\pi \dot{\mathfrak{J}} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wenn e die elektrische Raumdichte und $\mathfrak{J}$ den spezifischen Strom bedeutet. In dem von Ladung freien Raum gilt in Zylinderkoordinalen ϱ, ϑ, z:



$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\vartheta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (7)$$

deren Lösung sich in bekannter Weise aus Kreis- und Zylinderfunktionen zu

$$\varphi = Z_n(i\,m\,\varrho)\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} m z\Bigg\}\cdot\begin{Bmatrix}\sin\\ \cos\end{Bmatrix} n\vartheta \qquad (8)$$

zusammensetzt. Um sie den physikalischen Bedingungen anzupassen, bedenken wir, daß wegen der vorausgesetzten großen Windungszahl φ von ϑ nur sehr gering abhängen wird, daß wir demgemäß keinen großen Fehler begehen, wenn wir $n = 0$ setzen. Bevorzugen wir ferner die Sinusfunktion, so haben wir

$$m = \frac{\pi p}{2l} \qquad p = 1, 2, 3 \ldots$$

zu wählen, damit φ an den Stellen $z = \pm 2l$ zu Null wird. Die weiteren Bedingungen, daß das Potential im Unendlichen verschwinden und im Nullpunkt endlich bleiben muß, lassen sich durch die Hankelsche Funktion erster Art bzw. durch die Besselsche Funktion vermöge deren Eigenschaften

$$\lim_{x\to\infty} H_0^{(1)}(i x) = 0$$
$$\lim_{x\to 0} J_0(i x) = \text{endlich}$$

erfüllen. Nehmen wir schließlich noch die zu bestimmende Eigenfrequenz ν in die Partikularlösung auf, so entstehen folgende drei Ansätze:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho < R_1 &: \varphi_i = e^{i\nu t}\sum_{p=1}^{\infty} A_p J_0\left(\pi i p\frac{\varrho}{2l}\right)\cdot\sin\left(\pi p\frac{z}{2l}\right)\\
R_1 < \varrho < R_2 &: \varphi_m = e^{i\nu t}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{B_p J_0\left(\pi i p\frac{\varrho}{2l}\right) - C_p H_0^{(1)}\left(\pi i p\frac{\varrho}{2l}\right)\right\}\sin\pi p\frac{z}{2l}\\
\varrho > R_2 &: \varphi_a = e^{i\nu t}\sum_{p=1}^{\infty} D_p H_0^{(1)}\left(\pi i p\frac{\varrho}{2l}\right)\sin\pi p\frac{z}{2l}.
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Da die Wirbelkraft im stromlosen Gebiet ebenfalls der Potentialgleichung genügt, so können wir die Partikularlösung (8) auch für $\mathfrak{K}$ in Anspruch nehmen. Allerdings müssen wir dabei beachten, daß $\Delta\mathfrak{K}$ nur in Kartesischen Koordinaten gilt, daß demgemäß (8) nicht den Vektor $\mathfrak{K}$, sondern nur eine Komponente darstellen kann. Offenbar ist nun:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{K} &= \mathfrak{K}_\vartheta\\
\mathfrak{K}_x &= \mathfrak{K}_\vartheta\cdot\cos\vartheta,
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

da ja $\mathfrak{K}$ gemäß seiner Integraldarstellung

$$\mathfrak{K} = -\int\frac{\dot{\mathfrak{J}}}{r}\,dV \qquad (11)$$

den Windungen parallel gerichtet ist. Bedenken wir schließlich noch, daß $\mathfrak{K}$ dort Maxima hat, wo φ Minima, so gelangen wir zu den Wirbelkraftansätzen:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho < R_1 &: \mathfrak{K}_x^{(i)} = e^{i\nu t}\sum_{p=1}^{\infty} a_p J_1\left(\frac{\pi i \varrho}{2l}\right)\cos\left(\pi p\frac{z}{2l}\right)\cdot\cos\vartheta\\
R_1 < \varrho < R_2 &: \mathfrak{K}_x^{(m)} = e^{i\nu t}\sum_{p=1}^{\infty}\left\{b_p J_1\left(\pi i\frac{\varrho}{2l}\right) - c_p H_1^{(1)}\left(\pi i\frac{\varrho}{2l}\right)\right\}\cos\left(\pi p\frac{z}{2l}\right)\cdot\cos\vartheta\\
\varrho > R_2 &: \mathfrak{K}_x^{(a)} = e^{i\nu t}\sum_{p=1}^{\infty} d_p H_1^{(1)}\left(\pi i p\frac{\varrho}{2l}\right)\cos\left(\pi p\frac{z}{2l}\right)\cdot\cos\vartheta.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$



Zur Bestimmung der in diesen Ansätzen noch unbekannten Koeffizienten haben wir zunächst die Bedingung des stetigen Übergangs von Potential und Wirbelkraft [vgl. L. (36), (40)].

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_i = \varphi_m \Big\}_{\varrho = R_1} & \mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_m \Big\}_{\varrho = R_1} \\ \varphi_m = \varphi_a \Big\}_{\varrho = R_2} & \mathfrak{K}_m = \mathfrak{K}_a \Big\}_{\varrho = R_2} \end{array}\right| \tag{13}$$

woraus sich die Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} B_p - A_p &= C_p \frac{H_0^{(1)}(i p \alpha)}{J_0(i p \alpha)} \\ D_p + C_p &= B_p \frac{J_0(i p \beta)}{H_0^{(1)}(i p \beta)} \\ b_p - a_p &= c_p \frac{H_1^{(1)}(i p \alpha)}{J_1(i p \alpha)} \\ d_p + c_p &= b_p \frac{J_1(i p \beta)}{H_1^{(1)}(i p \beta)} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

ergeben, wenn zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi R_1}{2 l} \\ \beta &= \frac{\pi R_2}{2 l} \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

gesetzt wird. Weitere Beziehungen zwischen den Koeffizienten fließen aus der Forderung, daß die Tangentialkomponente der elektrischen Kraft an der Drahtoberfläche stetig übergehen muß. Diese Bedingung reduziert sich nach Lenz [vgl. L. (3)] auf

$$\left(\mathfrak{K}_s + \frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)_{\text{Drahtoberfl.}} = 0 \tag{16}$$

und ergibt mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \pm \frac{2 l}{L_{1,2}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{17}$$

auf die innere und äußere Wicklung angewandt:

$$\left(\mathfrak{K}_{x\,(\vartheta = 0)}^{(i)} + \frac{2 l}{L_1} \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\right)_{\varrho = R_1} = 0 \tag{18}$$

und

$$\left(\mathfrak{K}_{x\,(\vartheta = 0)}^{(a)} - \frac{2 l}{L_2} \frac{\partial \varphi^{(a)}}{\partial z}\right)_{\varrho = R_2} = 0. \tag{19}$$

Die beiden in (18) und (19) verschiedenen Vorzeichen rühren von dem entgegengesetzten Wicklungssinn der inneren und äußeren Spulenlage her. Übrigens hätte z. B in (18) statt $\mathfrak{K}^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$ auch das Wertepaar $\mathfrak{K}^{(m)}$, $\varphi^{(m)}$ genommen werden können, da es aus Stetigkeitsgründen mit dem ersten gleichberechtigt ist. Die Auswertung der Gleichungen (18), (19) führt nun zu:

$$\left.\begin{aligned} a_p &= -\frac{\pi p}{L_1} \frac{J_0(i p \alpha)}{J_1(i p \alpha)} \cdot A_p \\ d_p &= \frac{\pi p}{L_2} \frac{H_0^{(1)}(i p \beta)}{H_1^{(1)}(i p \beta)} \cdot D_p \end{aligned}\right| \tag{20}$$

Um weitere Relationen zwischen den Koeffizienten zu erhalten, überlegen wir uns, daß der Ansatz (12) zunächst nur außerhalb der Stromleiter Gültigkeit beanspruchen

kann, daß er nur der Gleichung $\Delta \mathfrak{K} = 0$, nicht aber, wie wir doch verlangen müssen, der allgemeineren Gleichung $\Delta \mathfrak{K} = 4\pi \dot{\mathfrak{J}}$ genügt. Wie Lenz (vgl. L. p. 762) zeigt, können wir uns jedoch wegen der geringen Dicke der stromführenden Schicht mit der Lösung von $\Delta \mathfrak{K} = 0$ begnügen, wenn wir sie nur der Grenzbedingung [vgl. L. (12)]

$$\frac{\partial \mathfrak{K}_x^{(i)}}{\partial n_i} + \frac{\partial \mathfrak{K}_x^{(m)}}{\partial n_m} = 4\pi \dot{\gamma}_x \tag{21}$$

unterwerfen. γ bedeutet darin den pro Zentimeter Spulenhöhe durch die Windungen fließenden Strom und steht mit der auf den Windungen sich ansammelnden Ladung ω in der Beziehung [vgl. L. (37)]

$$\frac{L_{1,2}}{2l} \ddot{\omega}_{1,2} = \mp \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z}. \tag{22}$$

Für die innere Wicklung 1 und die äußere 2 folgt daraus unter Beachtung der schon oben über das Vorzeichen gemachten Bemerkung:

$$\frac{L_1}{2l} \ddot{\omega}_1 = -\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} \tag{23}$$

$$\frac{L_2}{2l} \ddot{\omega}_2 = -\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z}. \tag{24}$$

Die auf einer Windung sitzende Ladungsmenge pro Flächeneinheit ist gleich der Differenz des Potentialgradienten an beiden Seiten der Windung, beträgt also für die innere und äußere Spulenwicklung:

$$\omega_1 = \frac{1}{4\pi c^2} \left\{ -\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial \varrho} \right\}_{\varrho = R_1} \tag{25}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4\pi c^2} \left\{ -\frac{\partial \varphi^{(m)}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \varphi^{(a)}}{\partial \varrho} \right\}_{\varrho = R_2} \tag{26}$$

Die Ausrechnung ergibt hierfür mit Benutzung von (14) sowie der Beziehung:

$$H_0'(\xi) \cdot J_0(\xi) - H_0(\xi) J_0'(\xi) = H_0(\xi) J_1(\xi) - H_1(\xi) J_0(\xi) = -\frac{2}{\pi i \xi} \tag{27}$$

nach zweimaliger zeitlicher Ableitung die Werte:

$$\ddot{\omega}_1 = + \frac{i}{2\pi^2 R_1} \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 e^{i\nu t} \sum_{p=1}^{\infty} C_p \cdot \frac{1}{J_0(i p \alpha)} \sin\left(\pi p \frac{z}{2l}\right) \tag{28}$$

$$\ddot{\omega}_2 = - \frac{i}{2\pi^2 R_2} \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 e^{i\nu t} \sum_{p=1}^{\infty} B_p \cdot \frac{1}{H_0(i p \beta)} \sin\left(\pi p \frac{z}{2l}\right). \tag{29}$$

Kehren wir nunmehr zu den Gleichungen (23), (24) zurück, so liefern sie nach Ausführung der Integration nach z:

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{i}{2 \cdot \pi^3} \frac{L_1}{R_1} \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 e^{i\nu t} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} C_p \cdot \frac{1}{J_0(i p \alpha)} \cos\left(\pi p \frac{z}{2l}\right) \tag{30}$$

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{i}{2 \cdot \pi^3} \frac{L_2}{R_2} \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 e^{i\nu t} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p} B_p \cdot \frac{1}{H_0(i p \beta)} \cos\left(\pi p \frac{z}{2l}\right). \tag{31}$$

Damit sind wir in der Lage, die Bedingung (21) auswerten zu können. Wir haben sie nur mit $\gamma_x = \gamma \cdot \cos\vartheta$ für beide Wicklungen anzuschreiben:

$$\left\{ -\frac{\partial \mathfrak{K}_x^{(i)}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \mathfrak{K}_x^{(m)}}{\partial \varrho} \right\}_{\varrho = R_1} = 4\pi \dot{\gamma}_1 \cos\vartheta \tag{32}$$

$$\left\{ -\frac{\partial \mathfrak{K}_x^{(m)}}{\partial \varrho} + \frac{\partial \mathfrak{K}_x^{(a)}}{\partial \varrho} \right\}_{\varrho = R_2} = 4\pi \dot{\gamma}_2 \cos\vartheta \tag{33}$$

und die Gleichung (14) zu berücksichtigen, um zu erhalten:

$$\left.\begin{aligned} c_p &= -\frac{L_1}{\pi p}\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \frac{J_1(i p \alpha)}{J_0(i p \alpha)} \cdot C_p \\ b_p &= -\frac{L_2}{\pi p}\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \frac{H_1^{(1)}(i p \beta)}{H_0^{(1)}(i p \beta)} \cdot B_p \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Da alle Relationen zwischen den Koeffizienten für jedes p gelten, so wird es zweckmäßig erscheinen $p = 1$ zu wählen. Wir haben dann gemäß (14), (20), (34):

$$\left.\begin{aligned} B - A &= C \frac{H_0^{(1)}(i\alpha)}{J_0(i\alpha)} \\ D + C &= B \frac{J_0(i\beta)}{H_0^{(1)}(i\beta)} \\ b - a &= c \frac{H_1^{(1)}(i\alpha)}{J_1(i\alpha)} \\ d + c &= b \frac{J_1(i\beta)}{H_1^{(1)}(i\beta)} \\ c &= -\frac{L_1}{\pi}\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \frac{J_1(i\alpha)}{J_0(i\alpha)} \cdot C \\ b &= \frac{L_2}{\pi}\left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \frac{H_1^{(1)}(i\beta)}{H_0^{(1)}(i\beta)} \cdot B \\ a &= -\frac{\pi}{L_1} \frac{J_0(i\alpha)}{J_1(i\alpha)} \cdot A \\ d &= \frac{\pi}{L_2} \frac{H_0^{(1)}(i\beta)}{H_1^{(1)}(i\beta)} \cdot D \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Da dies Gleichungssystem in den Koeffizienten homogen ist, so möchte es scheinen, als sei unser Problem überbestimmt. Tatsächlich liegen nun ja die Verhältnisse bei den Eigenschwingungen so, daß deren Amplitude stets unbestimmt ist. Es kommt eben nicht auf die Absolutwerte der Koeffizienten an, sondern nur auf deren Verhältnisse. Man erkennt dann aber sofort, daß unsere acht Koeffizienten in Wahrheit nur sieben Unbekannte darstellen, daß als achte der noch unbestimmt gelassene Parameter ν, die Schwingungszahl, anzusehen ist. Führen wir statt ν auf Grund der Beziehung $\nu = \frac{2\pi c}{\lambda}$ die im Äther gemessene Wellenlänge λ ein, so ergibt die Auflösung des Gleichungssystems (35) für λ die biquadratische Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^4 \frac{\pi}{L_1} \cdot \frac{\pi}{L_2} \frac{J_0(i\alpha) \cdot H_0^{(1)}(i\beta) - H_0^{(1)}(i\alpha) J_0(i\beta)}{J_1(i\alpha) H_1^{(1)}(i\beta)} \\ &+ \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \left\{ 2 + \frac{L_1 H_1^{(1)}(i\alpha)\, J_0(i\beta)}{L_2 J_0(i\alpha) H_1^{(1)}(i\beta)} + \frac{L_2 J_1(i\beta) H_0^{(1)}(i\alpha)}{L_1 J_1(i\alpha) H_0^{(1)}(i\beta)} \right\} \\ &+ \frac{L_1}{\pi} \cdot \frac{L_2}{\pi} \frac{J_1(i\alpha) H_1^{(1)}(i\beta) - H_1^{(1)}(i\alpha) J_1(i\beta)}{J_0(i\alpha) H_0^{(1)}(i\beta)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

Diese noch recht unhandliche Gleichung läßt sich weitgehend vereinfachen unter der Annahme, daß die Differenz

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2l}(R_2 - R_1) = \frac{\pi d}{l} = \delta \quad (37)$$

klein gegenüber dem α, d. h. daß

$$2d \ll R$$

ist. Wir können dann die mit dem Argument $i\beta = i(\alpha + \delta)$ behafteten Funktionen

nach Potenzen von $i\delta$ entwickeln und bereits nach dem linearen Glied abbrechen, also

$$f(i\beta) = f(i\alpha) + i\delta f'(i\alpha)$$

setzen, so daß sich der in (36) stehende Ausdruck

$$J_1(i\alpha)\cdot H_1^{(1)}(i\beta) - H_1^{(1)}(i\alpha) J_1(i\beta) = J_0(i\alpha) H_0^{(1)}(i\beta) - H_0^{(1)}(i\alpha) J_0(i\beta)$$

auf $\frac{2i}{\pi\alpha}\cdot\delta$ reduziert. Bedenken wir weiter, daß wegen der Proportion

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

die Beziehungen:

$$\frac{L_1}{L_2} = 1 - \frac{\delta}{\alpha} \qquad \frac{L_2}{L_1} = 1 + \frac{\delta}{\alpha}$$

bestehen, so geht die Gleichung (36) unter Anwendung bekannter Näherungsformeln über in

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^4 + 2\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\cdot\frac{J_1(i\alpha)H_1^{(1)}(i\alpha)}{2i\delta}\cdot\pi\alpha\left\{2 - \frac{i\delta}{\pi\alpha}\left[\frac{1}{J_0(i\alpha)H_0^{(1)}(i\alpha)} + \frac{1}{J_1(i\alpha)H_1^{(1)}(i\alpha)}\right]\right\}$$
$$+ \left(\frac{L}{\pi}\right)^4\frac{J_1(i\alpha)H_1^{(1)}(i\alpha)}{J_0(i\alpha)H_0^{(1)}(i\alpha)} = 0.$$

Streichen wir das in der Klammer stehende, die kleine Größe δ enthaltende Glied gegen die 2, so bleibt:

$$\left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 = -\left(\frac{L}{\pi}\right)^2\left\{J_1\cdot H_1^{(1)}\cdot\frac{\pi\cdot\alpha}{i\delta} \mp \sqrt{\left(\frac{J_1\cdot H_1^{(1)}\cdot\pi\cdot\alpha}{i\delta}\right)^2 - \frac{J_1\cdot H_1^{(1)}}{J_0\cdot H_0^{(1)}}}\right\}. \tag{38}$$

Nehmen wir das positive Zeichen der Wurzel, so können wir unter der Wurzel das zweite Glied gegen das erste streichen, erhalten demnach

$$\lambda_1^{(1)} = 2L\sqrt{\frac{i\pi R}{d}J_1(i\alpha)H_1^{(1)}(i\alpha)} \tag{39}$$

als die erste Lösung. Wählen wir in (38) dagegen das negative Zeichen und formen die Wurzel in

$$J_1\cdot H_1^{(1)}\cdot\frac{\pi\cdot\alpha}{i\delta}\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{J_0\cdot H_0^{(1)}J_1\cdot H_1^{(1)}\cdot\pi^2\alpha^2}} = \frac{J_1\cdot H_1^{(1)}\cdot\pi\alpha}{i\delta}\left\{1 + \frac{\delta^2}{2\cdot\pi^2\alpha^2 J_0\cdot H_0^{(1)}\cdot J_1\cdot H_1^{(1)}}\right\}$$

um, so bleibt in der geschweiften Klammer nur

$$-\frac{\delta}{2i\pi\alpha J_0\cdot H_0^{(1)}} = -\frac{d}{i\pi R J_0 H_0^{(1)}}$$

stehen, womit von (38) als zweite Lösung

$$\lambda_1^{(2)} = 2L\sqrt{\frac{d}{i\pi\cdot R\cdot J_0(i\alpha)H_0^{(1)}(i\alpha)}} \tag{40}$$

bleibt.

Unsere Theorie fordert demnach das Vorhandensein zweier Arten von Grundschwingungen, von denen die eine, nämlich (39) wegen $d \ll R$ sehr lang, die andere (40) dagegen kurz ist. Nach der Formel (4) müssen wir aber gerade die lange Grundschwingung als charakteristisch für die zweilagige Spule ansehen. Das wird noch einleuchtender, wenn wir unter Benutzung der Grenzwerte[1])

$$\lim_{\alpha\to 0} J_0(i\alpha) = 1 \qquad \lim_{\alpha\to 0} J_1(i\alpha) = \frac{i\alpha}{2}$$

---

[1]) Vgl. z. B. Funktionentafeln von Jahnke und Emde.

$$\lim_{\alpha \to 0} H_0^{(1)}(i\alpha) = \frac{2}{i\pi} \log \frac{2}{\gamma \cdot \alpha} \qquad \lim_{\alpha \to 0} H_1^{(1)}(i\alpha) = -\frac{2}{\pi \cdot \alpha}$$

$$\gamma =$$

die Formeln (39) und (40) für

$$R \ll l$$

hinschreiben:

$$\lambda_1^{(1)} = 2\,L \sqrt{\frac{R}{d}} \tag{41}$$

$$\lambda_2^{(2)} = 2\,L \sqrt{\frac{d}{R} \cdot \frac{1}{2 \log \frac{2}{\gamma \cdot \alpha}}}. \tag{42}$$

Während die Übereinstimmung der Formel (41) mit (4) unsere einleitenden Betrachtungen rechtfertigt, zeigt der Vergleich von (42) mit der entsprechenden Lenzschen Formel [vgl. L. (58) p. 788], nämlich mit

$$\lambda = 2\,L \sqrt{\frac{1}{2 \log \frac{2}{\gamma \cdot \alpha}}},$$

daß bei der zweilagigen Spule ganz ähnliche Schwingungsverhältnisse auftreten können wie bei einer entsprechenden einlagigen Spule. Wir lassen diese kurze Welle im folgenden unberücksichtigt und beschäftigen uns nur mit der langen (39). Allerdings erfährt die Anwendbarkeit dieser Formel auf wirkliche Spulen, abgesehen von der Bedingung der dichten und engen Wicklung weitere Einschränkungen. Da nämlich in den dem Ausschnitt von der Länge 2 l benachbarten Gebieten Ströme entgegengesetzter Richtung fließen, da ferner ebendort der Potentialabfall weniger steil als an den Enden der freien Spule ist, so werden Selbstinduktion und Kapazität und damit die Wellenlänge des Ausschnitts kleiner als die der freien Spule sein. Dieser Unterschied wird um so stärker hervortreten, je kleiner l im Vergleich zum Spulenradius R ist, und um so mehr schwinden, je größer l im Vergleich zu R ist. Die Gültigkeit unserer Formel (39) werden wir somit nur für den Wertebereich

$$\frac{R}{l} \ll 1$$

behaupten können.

Um aus der Grundfrequenz λ_1 die $(p-1)$te Oberschwingung λ_p zu erhalten, haben wir nach Lenz statt L und l einfach $\frac{L}{p}$ und $\frac{l}{p}$ zu setzen. Dieser Substitution liegt die Auffassung zugrunde, nach der die $(p-1)$te Oberschwingung der 2 l langen Spule als Grundschwingung einer $\frac{2\,l}{p}$ langen anzusehen ist. Wir erhalten somit für das Frequenzspektrum unserer zweilagigen Spule unter den erwähnten Einschränkungen:

$$\lambda_p = \frac{2\,L}{p} \sqrt{\frac{i\pi R}{d} J_1(i\,p\,\alpha)\, H_1^{(1)}(i\,p\,\alpha)}. \tag{43}$$

4. Einfluß des Dielektrikums und der zylindrischen Gestalt der Drähte.

Unsere soeben abgeleitete Frequenzformel bezieht sich auf den Äther $(\varepsilon = 1)$. Ihre Verwendbarkeit erfordert aber unbedingt die Verallgemeinerung auf ein beliebiges Dielektrikum, das innen (ε_i), außen (ε_a), und zwischen den Spulenlagen (ε_m) verschieden sein kann $(\varepsilon_i \neq \varepsilon_m \neq \varepsilon_a)$. Da jedoch im wesentlichen nur im Gebiet

zwischen oberer und unterer Wicklung ein Feld vorhanden ist, so werden wir nur eine Abhängigkeit von ε_m erwarten. Diese Vermutung erwies sich bei der erneuten Durchrechnung unter Aufnahme der Dielektrizitätskonstanten in die Ausgangsgleichungen als zutreffend. Weit einfacher und bequemer gestaltet sich die Einführung der Dielektrizitätskonstanten jedoch im Rahmen einer zweiten, ebenfalls an (39) anzubringenden Korrektion, die den Einfluß der zylindrischen Gestalt der Drähte berücksichtigt. Was wir behandelt haben, ist ja eigentlich nicht die in einem beliebigen Dielektrikum befindliche Spule, sondern ein Gebilde aus zwei unendlich langen koaxialen im Äther liegenden Kreiszylindern, auf denen gewissermassen Spulenwindungen eingraviert sind. Es ist nun zu ermitteln, wie der Abstand 2 d der beiden Lagen unserer Ersatzspule zu dimensionieren ist, damit wir uns den Verhältnissen an der wirklichen Spule möglichst gut annähern. Würde man 2 d gleich dem Abstand der Lagenmitten der wirklichen Spule setzen, so entspräche das sicherlich nicht den tatsächlichen Kapazitätsverhältnissen. Denn die Kapazität der wirklichen Spule ist sowohl wegen der größeren Dielektrizitätskonstanten als auch wegen der größeren Nähe der positiven und negativen Ladungen (Bild 3) größer als die unserer idealisierten. Nach der Thomsonschen Formel werden wir demnach erwarten müssen, daß die nach (43) berechneten Wellenlängen gegenüber

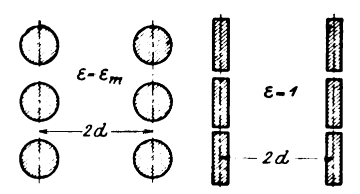


Bild 3. Einfluß der zylindrischen Gestalt der Drähte.

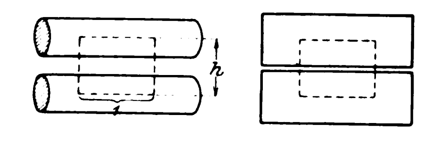


Bild 4. Kapazitätsberechnung.

den an wirklichen Spulen beobachteten zu klein ausfallen. Der Kapazitätsverkleinerung können wir leicht dadurch Rechnung tragen, daß wir den Abstand der koaxialen Zylinder so weit verringern, bis sie dieselbe Kapazitätswirkung zeigen wie die wirkliche Spule. Die Kapazität der Ersatzspule läßt sich angenähert nach der für den Plattenkondensator gültigen Formel berechnen. Sie ist im elektrostatischen Maßsystem bezogen auf ein Rechteck von der Höhe h, der Länge 1 und dem Plattenabstand 2 d' (Bild 4) gleich

$$k_1 = \frac{h}{8\pi d'}. \tag{44}$$

Zwar ist die Wirksamkeit der Spulenkapazität nicht die einer parallel geschalteten von dem hiernach für die ganze Spule zu errechnenden Betrag, sondern sie ist diejenige einer verteilten Kapazität. Trotzdem ist nicht zweifelhaft, daß wir die Verhältnisse an der wirklichen Spule gut annähern, wenn wir es so einrichten, daß die Kapazität (44) diejenige wird, die die beiden Spulenlagen gegeneinander besäßen, falls sie als Kondensator benützt würden, d. h. falls die Lagen getrennt auf das einheitliche Potential + K bzw. — K aufgeladen würden. Im Hinblick darauf, daß $d \ll R$ und $d \ll l$ ist, kommt die örtliche Veränderlichkeit der Potentialwerte, wie sie an der wirklichen, schwingenden Spule statthat, offenbar nicht in Betracht. Um nun die Kapazitätswirkung der als Kondensator aufgefaßten wirklichen Spule bestimmen zu können, müssen wir die zwischen der oberen und unteren Wicklung herrschende Potentialdifferenz kennen. Das kommt aber auf die Lösung eines reinen Potentialproblems hinaus: Gegeben sind zwei gleich stark aber entgegengesetzt geladene Drahtgitter mit dem Gitter bzw. Drahtabstand 2 d und h (gleich der Ganghöhe). Welches Potential herrscht an den Drähten? Diese Frage wird uns im



folgenden beschäftigen. Wir nehmen das Ergebnis vorweg: Belegen wir die Drähte mit der Ladung $\pm \frac{1}{2}$ pro Längeneinheit, so beträgt die Potentialdifferenz zwischen den Gittern 2 K, dessen Wert aus dem Bild 16 zu entnehmen ist. Da hiernach auf einem Rechteck der Höhe h und der Länge 1 die Ladung $\frac{1}{2}$ sitzt (Bild 4), so ist die auf diese Fläche bezogene Kapazität gleich:

$$k_2 = \frac{\varepsilon_m}{4\,K}, \tag{45}$$

wenn ε_m die zwischen den Gittern herrschende Dielektrizitätskonstante bedeutet. Der Vergleich von (44) mit (45) zeigt, daß wir statt d den Wert

$$d' = \frac{h}{2\,\pi\,\varepsilon_m} K \tag{46}$$

wählen müssen, um in beiden Fällen gleiche Kapazitätswirkung zu erzielen. Durch den Korrektionswert d' haben wir somit sowohl den Einfluß der zylindrischen Gestalt der Drähte als auch den des Dielektrikums berücksichtigt. Wir werden nunmehr erwarten dürfen, daß die Formel

$$\lambda_p = \frac{2\,L}{p} \sqrt{\frac{i\,\pi\,R}{d'} J_1(i\,p\,\alpha) \cdot H_1^{(1)}(i\,p\,\alpha)} \tag{47}$$

das Frequenzspektrum einer im Vergleich zum Durchmesser langen zweilagigen Spule enger Wicklung mit guter Annäherung zu bestimmen gestattet. Der Einfluß der Drahtform auf die Selbstinduktion ist zu vernachlässigen, da ja der Strom in beiden Wicklungen in der gleichen Richtung fließt und also hinsichtlich der Selbstinduktion dieselben Verhältnisse herrschen wie bei einer einlagigen Spule.

5. Das Potential der Doppelleitung.

Zur Bestimmung des korrigierten Abstandes 2 d' brauchen wir, wie vorstehend ausgeführt, die Kenntnis des Potentialfeldes zweier paralleler Drahtgitter. Dabei wird es zweckmäßig sein, die zwecks Lösung anzuwendende Methode an dem Fall der Doppelleitung zu entwickeln, deren Lösung ja in strenger Form bekannt ist. Der Vergleich dieser strengen Lösung mit der angenäherten wird dann zugleich einen Anhaltspunkt für die Brauchbarkeit unseres Verfahrens geben.

Das Potential einer Doppelleitung findet man bekanntlich dadurch, daß man zwei unendlich lange im Abstand 2 a parallel laufende Graden mit Ladung belegt und die zugehörigen Flächen konstanten Potentials aufsucht. Beträgt die Ladung pro Längeneinheit $\pm \frac{1}{2}$ und deutet das Symbol $\Re$ in üblicher Weise an, daß nur der reelle Teil des folgenden komplexen Ausdrucks gemeint ist, so gibt (Bild 5)

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \Re\left\{\log \frac{z_2}{z_1}\right\} \\ z &= x + i\,y \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

das Potential der beiden Graden an. Sucht man aus der Bedingung

$$\varphi = \text{const} = \varkappa$$

die zugehörigen Äquipotentialflächen, so findet man ein System von Kreiszylindern, deren Mittelpunkte auf der x-Achse liegen und vom Koordinatenursprung die Entfernung

$$d = \sqrt{a^2 + r^2}$$
$$r = \text{Drahtradius}$$

haben. Denken wir uns demnach zwei zusammengehörige Flächen gleichen Potentials ($\pm \varkappa$) durch leitende Kreiszylinder ersetzt, so wird das Potentialfeld nicht gestört, und wir haben eine Doppelleitung, deren Potential die Gleichung (48) angibt. Transformieren wir sie, wie es für die folgenden Rechnungen zweckmäßig erscheint, auf das im Mittelpunkt des linken Drahtes gelegene ungestrichene System auf Grund der Formeln

$$z_1 = (z - d) + a$$
$$z_2 = (z - d) - a,$$

so ergibt sich

$$\varphi = \Re\left\{\log\frac{(z-d)-a}{(z-d)+a}\right\}$$

und nach Abspaltung des reellen Teils:

$$\varphi = \log\left\{\frac{d}{r} + \sqrt{\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 1}\right\} \tag{49}$$

Wollen wir kurz die hier angewandte Methode charakterisieren, so können wir sagen, wir haben das Potential der Doppelleitung exakt dadurch dargestellt, daß wir in das Innere der Drähte, jedoch nicht in deren Achsen selbst, logarithmische Pollinien gesetzt haben.

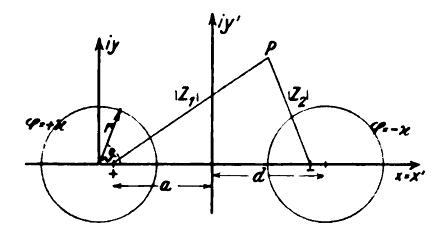


Bild 5. Die den Werten $\pm \varkappa$ entsprechenden Äquipotentialflächen.

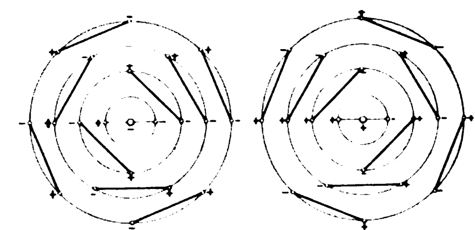


Bild 6. Anordnung der Dipollinien. Im Zentrum Durchstoßpunkt der logarithmischen Pollinien, auf dem dritten Kreis z. B. eine Dipollinie dritter Ordnung.

Hier knüpft nun unsere Näherungsmethode an, indem sie zeigt, daß die eben skizzierte Polanordnung zwar die einfachste ist, insofern sie mit logarithmischen Pollinien allein auskommt, aber nicht die einzig mögliche. Wir können nämlich auch so vorgehen, daß wir die Achsen der beiden Drähte selbst als positiv bzw. negativ geladene logarithmische Pollinien auffassen mit Potentialbeiträgen, die sich als reelle Teile der komplexen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} g_0(z) &= \log\frac{1}{z} \\ -g_0(z-2d) &= -\log\frac{1}{z-2d} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

darstellen. Die Bezeichnung g_0 (z) ist in Hinblick auf die spätere Übertragung auf das Gitterpotential gewählt. Das aus (50) resultierende Potential

$$\varphi_0 = \Re\{g_0(z) - g_0(z-2d)\} \tag{51}$$

wird allerdings auf den Drähten durchaus noch nicht konstant, d. h. von ϑ unabhängig sein. Wäre nämlich überhaupt nur eine einzige, etwa die positiv oder nur die negativ geladene Pollinie vorhanden, so müßte deren Potential g_0 (z) bzw. $-g_0(z-2d)$ auf der zugehörigen Drahtoberfläche aus Symmetriegründen konstant sein. Die Anwesenheit der entgegengesetzt geladenen Pollinie verursacht aber eine Störung, die sich am stärksten in der x-Achse bemerkbar macht, und zwar so, daß g_0 (z) auf der Oberfläche des linken Drahtes für $\vartheta = 0$ den kleinsten und für $\vartheta = \pi$ den größten positiven Wert, $-g(z-2d)$ auf dem rechten Draht aber für $\vartheta = \pi$ den kleinsten nur für $\vartheta = 0$ den größten negativen Wert annehmen wird. Um diesen

noch von ϑ abhängigen Verlauf zu korrigieren, stehen uns Dipollinien erster und höherer Ordnung mit Potentialbeiträgen zur Verfügung, die sich durch Abtrennung der reellen Teile aus den komplexen Funktionen

$$g_\nu(z) = \frac{1}{z_\nu} \tag{52}$$

ergeben. Damit Dipollinien auf der der entgegengesetzt geladenen Pollinie zugewandten Seite eine Verstärkung des schon vorhandenen Potentials bewirken, sind sie so anzuordnen, wie es Bild 6 angibt. Es zeigt, daß nur die Dipollinien der ungeraden Ordnung in beiden Drähten dieselbe Lage haben, daß dagegen die der geraden, etwa der (2ν)ten Ordnung gegeneinander um den Winkel $\frac{\pi}{2\nu}$ verschoben erscheinen und demnach mit entgegengesetztem Zeichen zu versehen sind. Wir gelangen somit zu dem Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu \\ \varphi_0 &= \Re\{g_0(z) - g_0(z - 2d)\} \\ \varphi_\nu &= \Re\{g_\nu(z) - (-1)^\nu g_\nu(z - 2d)\} \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

oder ausführlich geschrieben:

$$\varphi = \Re\left\{\log\frac{z - 2d}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \left[\frac{1}{z_\nu} - \frac{(-1)^\nu}{(z - 2d)^\nu}\right]\right\} \tag{54}$$

von dem wir behaupten, daß er das Potential der Doppelleitung in hinreichender Annäherung darstellt. Um das zu beweisen, brauchen wir nur die strenge Lösung (49) in eine Reihe zu entwickeln. Es ist $\log[z-(d-a)] = \log z\left(1 - \frac{d-a}{z}\right) = \log z + \log\left(1 - \frac{d-a}{z}\right)$ oder nach bekannter Formel:

$$\log[z - (d - a)] = \log z - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{d-a}{z}\right)^\nu.$$

Die hierin enthaltene unendliche geometrische Reihe konvergiert, da wegen

$$\left|\frac{d-a}{z}\right| < 1$$

$$|z| = \text{Drahtradius}$$

der Quotient aus dem $(n+1)$ten und dem $n$te Gliede, nämlich

$$q = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{d-a}{z}$$

stets < 1 ist.

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \log[z - (d + a)] &= \log[(z - 2d) + (d - a)] \\ &= \log(z - 2d)\left[1 + \frac{d-a}{z-2d}\right] \end{aligned}$$

also

$$\log[z - (d + a)] = \log(z - 2d) - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu}\left(\frac{d-a}{z-2d}\right)^\nu.$$

Auch diese Entwicklung ist nach einem Satz über alternierende Reihen konvergent, da wegen

$$\left|\frac{d-a}{z-2d}\right| < 1$$

$$|z| = \text{Drahtradius}$$

die absoluten Beträge der Glieder mit wachsendem n stets abnehmen und außerdem

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{d-a}{z-2d} \right)^n = 0$$

ist. Somit erhalten wir für (49) die konvergente Reihe

$$\varphi = \Re \left\{ \log \frac{z-2d}{z} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} (d-a)^\nu \left[\frac{1}{z^\nu} - \frac{(-1)^\nu}{(z-2d)^\nu} \right] \right\} \tag{55}$$

Wir haben nur noch

$$c_\nu = \frac{1}{\nu} (d-a)^\nu \tag{56}$$

zu wählen, um in Übereinstimmung mit unserem Ansatz (54) zu kommen.

Wir interessieren uns nun vor allem für den Wert des Potentials an der Oberfläche des positiv geladenen Drahtes, d. h. für die Werte

$$\left. \begin{aligned} z &= r \cdot e_{i\vartheta} \\ r &= \text{Drahtradius} \end{aligned} \right\} \tag{57}$$

Um die zur numerischen Berechnung notwendige Abspaltung des reellen Anteils von (53) durchzuführen, setzen wir

$$z - 2d = R \cdot e^{i\Theta} \tag{58}$$

Die Amplitude R und Phase Θ bestimmen sich daraus zu

$$\left. \begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + 4d^2 - 4r \cdot d \cdot \cos\vartheta} \\ \operatorname{tg} \Theta &= \frac{r \cdot \sin\vartheta}{r \cdot \cos\vartheta - 2d} \end{aligned} \right\} \tag{59}$$

so daß nunmehr gilt:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \log \frac{R}{r} \\ \varphi_1 &= \frac{1}{r} \cos\vartheta + \frac{1}{R} \cos\Theta \\ \varphi_2 &= \frac{1}{r^2} \cos 2\vartheta - \frac{1}{R^2} \cos 2\Theta \\ \varphi_3 &= \frac{1}{r^3} \cos 3\vartheta + \frac{1}{R^3} \cos 3\Theta \end{aligned} \right\} \tag{60}$$

Für ein fest vorgegebenes Wertsystem 2r, 2d sind die φ_ν-Funktionen von ϑ allein. Um einen Überblick über ihren von ϑ abhängigen Verlauf zu gewinnen, wurden sie für den Fall

$$\left. \begin{aligned} 2r &= 0{,}05 \text{ cm} \\ 2d &= 0{,}08 \text{ cm} \end{aligned} \right\} \tag{61}$$

berechnet und als Kurven in Figur 7 eingetragen. Sie zeigen im großen und ganzen einen $\cos\vartheta$, $\cos 2\vartheta \ldots \cos v\vartheta$-Verlauf.

Um das auf den Drähten herrschende Potential wirklich angeben zu können, bedürfen wir der Kenntnis der Entwicklungsglieder c_ν. Wir erhalten sie aus der Bedingung

$$\varphi_{|z|=r} = \varphi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu = \varkappa.$$

Da sie für jedes ϑ erfüllt sein muß, so können wir aus ihr durch spezielle Wahl von ϑ so viele Gleichungen bilden, wie zur Bestimmung von $\varkappa$ und der c_ν nötig sind. Dabei werden sich offenbar um so genauere Werte ergeben, je mehr Entwicklungsglieder berücksichtigt werden. Versuchen wir es z. B. mit drei Gliedern und wählen für ϑ die Werte



$$\vartheta = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3}{4}\pi,$$

so gelangen wir zu folgendem Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \underset{(\vartheta=0)}{\varphi_0} + c_1 \underset{(\vartheta=0)}{\varphi_1} + c_2 \underset{(\vartheta=0)}{\varphi_2} \\ \varkappa &= \underset{\left(\vartheta=\frac{\pi}{2}\right)}{\varphi_0} + c_1 \underset{\left(\vartheta=\frac{\pi}{2}\right)}{\varphi_1} + c_2 \underset{\left(\vartheta=\frac{\pi}{2}\right)}{\varphi_2} \\ \varkappa &= \underset{\left(\vartheta=\frac{3}{4}\pi\right)}{\varphi_0} + c_1 \underset{\left(\vartheta=\frac{3}{4}\pi\right)}{\varphi_1} + c_2 \underset{\left(\vartheta=\frac{3}{4}\pi\right)}{\varphi_2} \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

das unter Benutzung der in Bild 7 mitgeteilten Kurven für den schon erwähnten Fall (61) die Werte:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 0{,}00888 \\ c_2 &= 0{,}0000423 \\ \varkappa &= 1{,}036 \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

ergibt, während die genauen aus (56) und (49) folgenden Werte gleich:

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 0{,}00877 \\ c_2 &= 0{,}0000385 \\ \varkappa &= 1{,}04695 \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

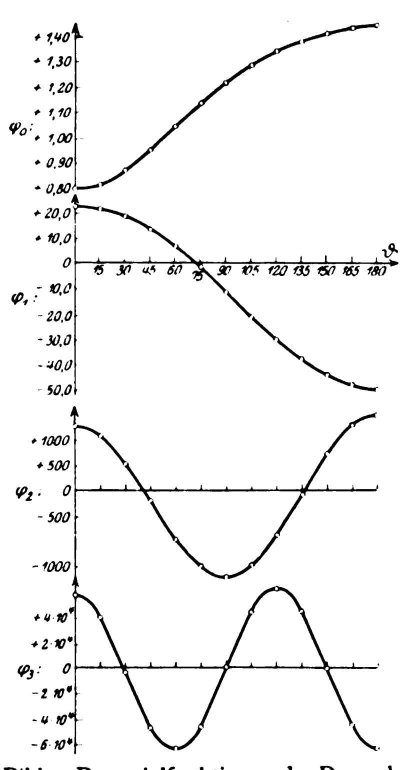


Bild 7. Potentialfunktionen der Doppelleitung für den Fall
$2r = 0{,}05$ cm
$2d = 0{,}08$ cm.

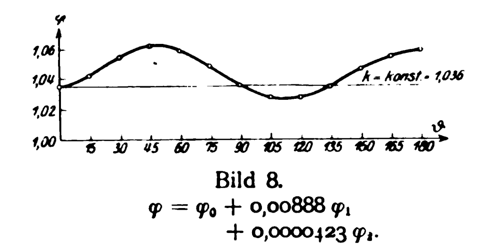


Bild 8.
$\varphi = \varphi_0 + 0{,}00888\,\varphi_1 + 0{,}0000423\,\varphi_2$.

sind. Um den bereits auf etwa 1 % angenäherten Potentialwert $\varkappa = 1{,}036$ weiter zu verbessern, überlegen wir uns, daß φ bei Benutzung von nur drei Entwicklungsgliedern auf der Drahtoberfläche tatsächlich ja noch nicht ganz von ϑ unabhängig ist, sondern, wie aus Bild 8 ersichtlich, noch Schwankungen in Form einer $\cos 3\,\vartheta$-Kurve zeigt. Wir berücksichtigen also auch noch das Glied $c_3 \cdot \varphi_3$, wenn wir ansetzen:

$$\varkappa + \tau \cdot \cos 3\,\vartheta = \varphi_0(\vartheta) + c_1\,\varphi_1(\vartheta) + c_2\,\varphi_2(\vartheta). \tag{65}$$

Indem wir

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2}{3}\pi, \quad \pi$$

wählen, erhalten wir folgende Gleichungen.

$$\left.\begin{aligned} \varkappa + \tau &= \varphi_0(0) + c_1\,\varphi_1(0) + c_2\,\varphi_2(0) \\ \varkappa - \tau &= \varphi_0\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_1\,\varphi_1\left(\frac{\pi}{3}\right) + c_2\,\varphi_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \varkappa + \tau &= \varphi_0\left(\frac{2\pi}{3}\right) + c_1\,\varphi_1\left(\frac{2\pi}{3}\right) + c_2\,\varphi_1\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \varkappa - \tau &= \varphi_0(\pi) + c_1\,\varphi_1(\pi) + c_2\,\varphi_2(\pi) \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Ihre Auflösung ergibt:

$$\left.\begin{aligned}
2\varkappa &= \left(\varphi_0(0) + \varphi_0\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + c_1\left(\varphi_1(0) + \varphi_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&\qquad + c_2\left(\varphi_2(0) + \varphi_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
c_1 &= \frac{a_1 a_2 + a_3 a_4}{a_2 a_6 + a_4 a_5} \\
c_2 &= \frac{a_1 a_5 - a_3 a_6}{a_2 a_6 + a_4 a_5} \\
a_1 &= \varphi_0\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \varphi_0(0) \qquad & a_4 &= \varphi_2(0) - \varphi_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\
a_2 &= \varphi_2(\pi) - \varphi_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad & a_5 &= \varphi_1\left(\frac{\pi}{3}\right) - \varphi_1(\pi) \\
a_3 &= \varphi_0(\pi) - \varphi_0\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad & a_6 &= \varphi_1(0) - \varphi_1\left(\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Dass wir zur Berechnung von $\varkappa$ die φ_ν nicht in ihrem ganzen Verlauf, sondern nur an den Stellen $\vartheta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ zu kennen brauchen, bedeutet eine nicht unerhebliche Erleichterung der zu leistenden Rechenarbeit. Für den Fall (61) ergibt (67):

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa &= 1{,}0465 \\
c_1 &= 0{,}00880 \\
c_2 &= 0{,}0000407
\end{aligned}\right\} \quad (68)$$

so daß also die Abweichung vom genauen Wert $\varkappa = 1{,}047$ weniger als 1 ‰ beträgt. Diese geradezu überraschend gute Übereinstimmung möchte als etwas Zufälliges, vielleicht durch eine günstige Wahl der Werte (61) Bedingtes erscheinen. Um ganz sicher zu gehen, wurde die soeben entwickelte Methode an einem möglichst ungünstigen Fall geprüft, nämlich an einer Doppelleitung aus sehr eng aneinanderliegenden Drähten:

$$2r = 0{,}08 \text{ cm}$$
$$2d = 0{,}10 \text{ cm}$$

Tatsächlich wurde gegen vorhin ein geringerer Genauigkeitsgrad festgestellt, indem der Näherungswert

$$\varkappa_{\text{genähert}} = 0{,}6902$$

von dem genauen nach Formel (49) berechneten

$$\varkappa_{\text{genau}} = 0{,}6932$$

um etwa 4 ‰ abweicht. Immerhin reicht diese Genauigkeit für die Anwendung vollkommen hin.

6. Das Potential der beiden Drahtgitter in ihrer ersten Anordnung.

Unser vorhin entwickeltes und als brauchbar erkanntes Näherungsverfahren läßt sich ohne Schwierigkeit auf den Fall zweier paralleler Drahtgitter übertragen. Fassen wir das Doppelgitter als ein System von über- bzw. untereinander mit Ab-



ständen h angeordneten Doppelleitungen auf (Bild 9), so erhalten wir deren Potential, indem wir den Potentialbeitrag der i-ten Doppelleitung

$$\varphi^{(i)} = \varphi_0^{(i)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^{(i)} \varphi_\nu^{(i)}$$

über i von $-\infty$ bis $+\infty$ summieren. Indem wir bei der Ausführung dieser Operation die Potentialbeiträge aller gleichartigen zur selben Gitterebene gehörigen Dipollinien zusammen fassen, entstehen aus dem $g_\nu(z)$-Funktionen allgemeineren Charakters, die von Lenz[1]) anläßlich eines ähnlichen Problems näher untersucht und als Gitterfunktionen $G_\nu(z)$ bezeichnet worden sind. Mit ihrer Benutzung erhalten wir für das Potential des Doppelgitters ganz analog (53):

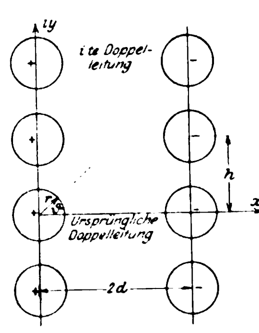


Bild 9. Erste Anordnung des Doppelgitters.

$$\left.\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \Phi_\nu \\ \Phi_0 &= \Re\{G_0(z) - G_0 z - 2d)\} \\ \Phi_\nu &= \Re\{G_\nu(z) - (-1)^\nu G^\nu(z - 2d)\} \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

Für die nullte Gitterfunktion, die ja definitionsgemäß alle logarithmischen Pollinien des linken Gitters enthält, haben wir

$$G_0(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \log \frac{1}{z - i m h},$$

für die der ν-ten Ordnung, zu der alle Dipollinien der ν-ten Ordnung vereinigt sind,

$$G_\nu(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z - i m h)^\nu}$$

zu setzen. $G_0(z)$ formen wir zweckmäßig folgendermaßen um:

$$G_0(z) = \log\frac{1}{z} + \sum_{m=1}^{\infty} \log \frac{1}{z^2 - (i m h)^2} = \log\left(\frac{i\pi}{h} \cdot \frac{1}{\frac{i\pi z}{h} \prod_{m=1}^{\infty}\left[1 - \left(\frac{i\pi z}{h} \cdot \frac{1}{m\pi}\right)^2\right]}\right) + \text{const.}$$

Lassen wir die Konstante als unwesentlich fort, so bleibt

$$G_0(z) = \log\left\{\frac{i\pi}{h} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{i\pi z}{h}\right)}\right\}$$

oder bei Benützung der Exponentialfunktionen:

$$G_0(z) = \log\left\{\frac{2\pi}{h} \frac{e^{\frac{\pi z}{h}}}{e^{\frac{2\pi z}{h}} - 1}\right\} \quad (70)$$

Aus ihr lassen sich die höheren nach der Formel

$$G_\nu(z) = \frac{(-1)^\nu}{(\nu - 1)!} \frac{d^\nu}{d z^\nu} G_0(z)$$

ableiten. Schreiben wir sie in der Form:

[1]) Ann. d. Ph. 1912. S. 923.

$$G_\nu(z) = -\frac{1}{(\nu-1)}\frac{d}{dz}\left\{\frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-2)!}\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}}G_0(z)\right\}$$

so bedeutet ja die Klammer nichts anderes als die $(\nu-1)$te Gitterfunktion $(\nu \geqq 1)$. Wir haben damit die Rekursionsformel

$$\left.\begin{array}{c} G_\nu(z) = -\dfrac{1}{(\nu-1)}\dfrac{d}{dz}G_{\nu-1}(z) \\ [\nu \geqq 1] \end{array}\right\} . \tag{71}$$

die es gestattet, jede Gitterfunktion aus der ihr vorhergehenden zu berechnen, also besteht

$$\left.\begin{array}{l} G_1(z) = \dfrac{\pi}{h}\dfrac{e^{\frac{2\pi z}{h}}+1}{e^{\frac{2\pi z}{h}}-1} \\ G_2(z) = \left(\dfrac{2\pi}{h}\right)^2 \dfrac{e^{\frac{2\pi z}{h}}}{\left(e^{\frac{2\pi z}{h}}-1\right)^2} \\ G_3(z) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{h}\right)^3 e^{\frac{2\pi z}{h}} \dfrac{e^{\frac{2\pi z}{h}}+1}{\left(e^{\frac{2\pi z}{h}}-1\right)^3} \end{array}\right\} . \tag{72}$$

Daß in ihnen die für die Doppelleitung aufgestellten speziellen Funktionen enthalten sind, läßt sich leicht durch den Grenzübergang $h \to \infty$ zeigen. Dann rücken nämlich die das Doppelgitter bildende Doppelleitungen ins Unendliche mit Ausnahme der auf der x-Achse gelegenen, und wir erhalten durch Entwicklung der Exponentialfunktionen aus (70) und (72):

$$\left.\begin{array}{l} \underset{(h\to\infty)}{G_0(z)} = g_0(z) = \log\dfrac{1}{z} \\ \underset{(h\to\infty)}{G_1(z)} = g_1(z) = \dfrac{1}{z} \\ \underset{(h\to\infty)}{G_2(z)} = g_2(z) = \dfrac{1}{z^2} \\ \underset{(h\to\infty)}{G_3(z)} = g_3(z) = \dfrac{1}{z^3} \end{array}\right\} \tag{73}$$

in Übereinstimmung mit (50) und (52).

Zur Abtrennung der reellen Teile von (70) und (72) führen wir für die dort auftretenden Komplexen-Ausdrücke Polarkoordinaten auf Grund folgender Definitionen ein:

$$\left.\begin{array}{l} z = r\,e^{i\vartheta} \\ e^{\frac{2\pi z}{h}} = \varrho\cdot e^{i\omega} \\ e^{\frac{2\pi z}{h}} - 1 = P_1\,e^{i\Omega_1} \\ e^{\frac{2\pi z}{h}} + 1 = P_2\,e^{i\Omega_2} \end{array}\right\} \tag{74}$$

Die Amplituden und Phasen dieser komplexen Größen bestimmen sich in bekannter Weise unter Benutzung der Abkürzungen

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{2\pi d}{h} \\ v = \dfrac{2\pi r}{h} \end{array}\right\} \tag{75}$$

zu $v \cdot \cos\vartheta$

$$\left.\begin{aligned}
\varrho &= e \\
\omega &= v \cdot \sin\vartheta \\
P_1 &= \sqrt{\varrho^2 - 2\varrho\cos\omega + 1} \\
P_2 &= \sqrt{\varrho^2 + 2\varrho\cos\omega + 1} \\
\operatorname{tg}\Omega_1 &= \frac{\varrho\sin\omega}{\varrho\cos\omega - 1} \\
\operatorname{tg}\Omega_2 &= \frac{\varrho\sin\omega}{\varrho\cos\omega + 1}
\end{aligned}\right\} \qquad (76)$$

Damit können wir die reellen Teile unserer auf das linke Gitter bezüglichen Gitterfunktionen sofort angeben:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R}\{G_0(z)\} &= \frac{\pi r}{h}\cos\vartheta - \log\frac{h}{2\pi}P_1 \\
\mathfrak{R}\{G_1(z)\} &= \frac{\pi}{h}\frac{P_2}{P_1}\cos(\Omega_1 - \Omega_2) \\
\mathfrak{R}\{G_2(z)\} &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{\varrho}{P_1^2}\cos(2\Omega_1 - \omega) \\
\mathfrak{R}\{G_3(z)\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^3 \frac{\varrho \cdot P_2}{P_1^3}\cos(3\Omega_1 - \Omega_2 - \omega)
\end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

Um die gleichen Betrachtungen für die Funktionen des rechten Gitters, d. h. für die des Arguments (z — 2 d) durchzuführen, definieren wir:

$$\left.\begin{aligned}
e^{\frac{2\pi}{h}(z-2d)} - 1 &= P_1' e^{i\Omega_1'} \\
e^{\frac{2\pi}{h}(z-2d)} + 1 &= P_2' e^{i\Omega_2'}
\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

Unter Benutzung der hieraus folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned}
P_1' &= \sqrt{\varrho^2 e^{-4u} - 2\varrho \cdot e^{-2u}\cos\omega + 1} \\
P_2' &= \sqrt{\varrho^2 e^{-4u} + 2\varrho \cdot e^{-2u}\cos\omega + 1} \\
\operatorname{tg}\Omega_1' &= \frac{\varrho\sin\omega\, e^{-2u}}{\varrho\cos\omega\, e^{-2u} - 1} \\
\operatorname{tg}\Omega_2' &= \frac{\varrho\sin\omega\, e^{-2u}}{\varrho\cos\omega\, e^{-2u} + 1}
\end{aligned}\right\} \qquad (79)$$

erhalten wir aus (70) (72):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{R}\{G_0(z - 2d)\} &= \frac{\pi r}{h}\cos\vartheta - u - \log\frac{h}{2\pi}P_1' \\
\mathfrak{R}\{G_1(z - 2d)\} &= \frac{\pi}{h}\frac{P_2'}{P_1'}\cos(\Omega_1' - \Omega_2') \\
\mathfrak{R}\{G_2(z - 2d)\} &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{\varrho e^{-2u}}{P_1'^2}\cos(2\Omega_1' - \omega) \\
\mathfrak{R}\{G_3(z - 2d)\} &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^3 \varrho \cdot e^{-2u}\frac{P_2'}{P_1'^3}\cos(3\Omega_1' - \Omega_2' - \omega)
\end{aligned}\right\} \qquad (80)$$

Damit sind wir am Ziel, insofern wir für unsere Potentialfunktionen (69) folgende zur numerischen Berechnung geeigneten Ausdrücke erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_0 &= u + \log \frac{P_1'}{P_1} \\
\Phi_1 &= \frac{\pi}{h}\left\{\frac{P_2}{P_1}\cos(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{P_2'}{P_1'}\cos(\Omega_1' - \Omega_2')\right\} \\
\Phi_2 &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\left\{\frac{\varrho}{P_1^2}\cos(2\Omega_1 - \omega) - \frac{\varrho e^{-2u}}{P_1'^2}\cos(2\Omega_1' - \omega)\right\} \\
\Phi_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^3\left\{\frac{\varrho P_2}{P_1^3}\cos(3\Omega_1 - \Omega_2 - \omega) + \varrho\cdot e^{-2u}\frac{P_2'}{P_1'^3}\cos(3\Omega_1' - \Omega_2' - \omega)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

Da es sich empfiehlt, dimensionslose Größen zu definieren, so wurden die Φ_ν $(\nu > 0)$ für die numerische Berechnung noch mit dem Faktor

$$\left(\frac{h}{2\pi}\right)^\nu (\nu - 1)!$$

versehen.

Die recht kompliziert gebauten Potentialfunktionen Φ_ν hängen von u, v, ϑ ab:

$$\Phi_\nu = \Phi_\nu(u, v, \vartheta).$$

Haben wir einmal ein durch feste Werte u, v charakterisiertes Gittersystem, so bleibt nur die Abhängkeit von ϑ.

$$\Phi_\nu = \Phi_\nu(\vartheta)$$
$$u, v = \text{const.}$$

Um zur Berechnung des Koeffizienten C_ν einen Überblick über den Verlauf der Funktionen in ihrer Veränderlichkeit mit ϑ zu erhalten, wurden sie — dimensionslos gemacht — für die in Hinblick auf die später zu diskutierenden Messungen von Ridder gewählten Werte

$$\left.\begin{aligned}
2r &= 0{,}05 \text{ cm} \\
2d &= 0{,}08 \text{ cm} \\
h &= 0{,}06 \text{ cm} \\
\text{also} \quad u &= 1{,}33 \cdot \pi \\
v &= 0{,}833 \cdot \pi
\end{aligned}\right\} \quad (82)$$

im Intervalle $0 \leq \vartheta \leq \pi$ fortschreitend um je 15^0 mit Hilfe fünfstelliger Logarithmentafeln berechnet und in Bild 13 eingetragen. Da der Vergleich mit Bild 10 zeigt, daß sich der Charakter der Φ_ν gegenüber den φ_ν gar nicht geändert hat, so behalten die Überlegungen, die zur Aufstellung der Gleichung (65) führten, auch im vorliegenden allgemeinen Fall ihre Gültigkeit. Wie dort werden wir jetzt ebenfalls schon sehr angenäherte Potentialwerte erwarten, wenn wir nur die drei ersten Entwicklungsglieder der Reihe (69) benutzen und den Einfluß des vierten (73) durch $T \cdot \cos 3\vartheta$ berücksichtigen, d. h. wenn wir setzen

$$K + T \cdot \cos 3\vartheta = \Phi_0 + C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2. \quad (83)$$

Bild 10. Die Potentialfunktionen (81), durch Multiplikation mit $\left(\frac{h}{2\pi}\right)^\nu (\nu - 1)$ dimensionslos gemacht, für den Fall
$u = 1{,}33\,\pi$
$v = 0{,}833\,\pi$.

Wählen wir wie bei der Doppelleitung für ϑ die Werte

$$\vartheta = 0, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2\pi}{3}, \quad \pi,$$

so ergibt die Auflösung des aus (83) mit diesen Werten gebildeten Gleichungssystems nicht nur die Koeffizienten C_1 und C_2, sondern auch den gewünschten Konstanten Potentialwert K selbst gemäß den Gleichungen:

$$
\left.\begin{aligned}
2\,K &= \left[\Phi_0(0) + \Phi_0\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] + C_1\left[\Phi_1(0) + \Phi_1\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
&\qquad + C_2\left[\Phi_2(0) + \Phi_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \\
C_1 &= \frac{a_1\,a_2 + a_3\,a_4}{a_2\,a_6 + a_4\,a_5} \\
C_2 &= \frac{a_1\,a_5 - a_3\,a_6}{a_2\,a_6 + a_4\,a_5} \\
a_1 &= \Phi_0\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) - \Phi_0(0) \qquad & a_4 &= \Phi_2(0) - \Phi_2\left(\frac{2\,\pi}{3}\right) \\
a_2 &= \Phi_2(\pi) - \Phi_2\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad & a_5 &= \Phi_1\left(\frac{\pi}{3}\right) - \Phi_1(\pi) \\
a_3 &= \Phi_0(\pi) - \Phi_0\left(\frac{\pi}{3}\right) \qquad & a_6 &= \Phi_1(0) - \Phi_1\left(\frac{2\,\pi}{3}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{84}
$$

Damit sind wir in der Lage, für jedes Wertepaar u, v den ihm entsprechenden Potentialwert angeben zu können. Für den Fall (82) erhalten wir z. B.

$$
\underset{\substack{u = 1,33\,\cdot\,\pi \\ v = 0,833\,\cdot\,\pi}}{K} = 2,00. \tag{85}
$$

Es braucht wohl nicht besonders bemerkt zu werden, daß am rechten Gitter das Potential $-K$ herrscht, daß die Potentialdifferenz also $2\,K$ beträgt, wie in § 2 angegeben ist.

7. Das Potential der beiden Gitter in ihrer zweiten Anordnung.

Unser Potentialproblem ist für den Fall gelöst, daß die Drähte der oberen und unteren Wicklung, wie in Bild 11 angedeutet, genau übereinanderliegen. Man kann die Spule aber auch so wickeln, daß die Drähte der oberen Lage in die Rillen der unteren gelegt werden. Die dieser Wicklungsart entsprechende Anordnung der Drahtgitter sei als deren zweite bezeichnet (Bild 12). Es ist leicht einzusehen, daß die Kapazität in der zweiten Anordnung wegen Vergrößerung

Bild 11. Erste Anordnung.

Bild 12. Zweite Anordnung.

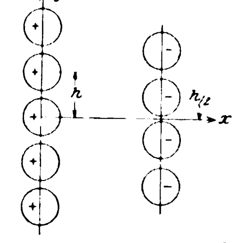


Bild 13. Doppelgitter in der zweiten Anordnung.

des Abstandes zwischen positiver und negativer Ladung abgenommen, das Potential dementsprechend zugenommen haben muß. Dies wird besonders stark dann hervortreten, wenn wir bei möglichst kleinem Lagenabstand $2\,d$ einen großen Drahtradius r wählen, d. h. bei großem v und kleinem u. Diesen Fall werden wir auch rechnerisch näher verfolgen.

Zunächst haben wir jedoch die allgemeinen Formeln zu entwickeln. Dazu beachten wir, daß ja die zweite Anordnung der Gitter durch Hinaufschieben des einen, etwa des rechten, um $\frac{h}{2}$ enstanden gedacht werden kann (vgl. Bild 13). Das

ihr entsprechende Potential $\Phi^{(2)}$ geht daher ohne weiteres aus dem für die erste Anordnung abgeleiteten hervor, wenn wir $z - 2d$ durch $z - 2d - i\frac{h}{2}$ ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{(2)} &= \Phi_0^{(2)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu^{(2)} \Phi_\nu^{(2)} \\ \Phi_\nu^{(2)} &= \Re\left\{ G_0(z) - G_0\left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right)\right. \\ \Phi_\nu^{(2)} &= \Re\left\{ G_\nu(z) - (-1)^\nu G^\nu \left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right)\right. . \end{aligned}\right\} \quad (86)$$

Hierin bedeuten gemäß den Formeln (70), (72):

$$\left.\begin{aligned} G_0\left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right) &= \log\left\{\frac{2\pi}{h}\frac{e^{\frac{\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)}}{\left(e^{\frac{2\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)} - 1\right)}\right\} \\ G_1\left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right) &= \frac{\pi}{h}\frac{e^{\frac{2\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)} + 1}{e^{\frac{2\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)} - 1} \\ G_2\left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right) &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{e^{\frac{2\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)}}{\left(e^{\frac{2\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)} - 1\right)^2} . \end{aligned}\right\} \quad (87)$$

Zur Bildung der reellen Teile, die ja stets allein nur in Frage kommen, formen wir die in (87) auftretenden Ausdrücke unter Benutzung der Definition (78) wie folgt um:

$$\left.\begin{aligned} e^{\frac{2\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)} + 1 &= e^{-i\pi}\left(e^{\frac{2\pi}{h}(z-2d)} - 1\right) = P_1' e^{i(\Omega_1' - \pi)} \\ e^{\frac{2\pi}{h}\left(z-2d-i\frac{h}{2}\right)} - 1 &= e^{-i\pi}\left(e^{\frac{2\pi}{h}(z-2d)} + 1\right) = P_2' e^{i(\Omega_2' - \pi)} . \end{aligned}\right\} \quad (88)$$

Wir erhalten dann

$$\left.\begin{aligned} \Re\left\{G_0\left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right)\right\} &= \frac{\pi}{h} r \cos\vartheta - u - \log\frac{h}{2\pi} P_2' \\ \Re\left\{G_1\left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right)\right\} &= \frac{\pi}{h}\frac{P_1'}{P_2'}\cos(\Omega_1' - \Omega_2') \\ \Re\left\{G_2\left(z - 2d - i\frac{h}{2}\right)\right\} &= -\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{\varrho \cdot e^{-2u}}{P_2'^2}\cos(\omega - 2\Omega_2') \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

und damit schließlich für die Gitterfunktionen der zweiten Anordnung:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0^{(2)} &= u + \log\frac{P_2'}{P_1'} \\ \Phi_1^{(2)} &= \frac{\pi}{h}\left\{\frac{P_2}{P_1}\cos(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{P_1'}{P_2'}\cos(\Omega_1' - \Omega_2')\right\} \\ \Phi_2^{(2)} &= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2\left\{\frac{\varrho}{P_1^2}\cos(2\Omega_1 - \omega) + \frac{\varrho \cdot e^{-2u}}{P_2'^2}\cos(2\Omega_2' - \omega)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (90)$$

Auch die $\Phi_\nu^{(2)}$ wurden mit dem Faktor $\left(\frac{h}{2\pi}\right)^\nu (\nu - 1)!$ $(\nu > 0)$ dimensionslos gemacht. Da im übrigen das bei der ersten Anordnung der Drahtgitter angewandte Verfahren zur Berechnung des Potentials auch hier seine Gültigkeit behält, so können wir die $\Phi_\nu^{(2)}$ sofort für den durchgehends betrachteten Fall (82) berechnen und mit den entsprechenden Φ_ν-Werten vergleichen. Dabei zeigt sich, daß die prozentualen Abweichungen der $\Phi_\nu^{(2)}$ von den Φ_ν also $\frac{\Phi_\nu^{(2)} - \Phi_\nu}{\Phi_\nu} \cdot 100$ für $\vartheta = 0$ die maximalen Beträge von 0,4%, 8%, 8% bzw. für $\nu = 0, 1, 2$ erreichen, dann aber mit wachsendem ϑ schnell geringer werden. Sie erweisen sich jedenfalls als zu gering, um in dem Bild 10 noch zum Ausdruck zu kommen. Daß, wie erwartet, stärkere Abweichungen erst bei großem v und kleinem u bemerkbar werden, zeigt der Fall

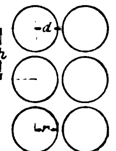


Bild 14. Doppelgitter für $u = \pi$, $v = 0{,}9 \cdot \pi$.

$$u = \pi$$
$$v = 0{,}9 \cdot \pi$$

für den wir die Werte

$$\left.\begin{aligned} K^{(2)} &= 0{,}823 \\ K &= 0{,}628 \end{aligned}\right\} \qquad (91)$$

erhalten. Das Bild 14 gibt das den Werten $u = \pi$ $v = 0{,}9\pi$ entsprechende Größenverhältnis der Drähte an. — Die vorstehend behandelten als erste und zweite Anordnung bezeichneten Wicklungsarten stellen Extremfälle für die Drahtlagerung dar. Bei der wirklichen Spule gehen die Windungen quer übereinander.

8. Numerische Rechnungen.

Die vorstehend entwickelten Näherungsmethoden liefern uns das Gitterpotential K und damit die in der Frequenzformel (47) auftretende Korrektionsgröße d' vermöge der Beziehung [vgl. (46)]

$$d' = \frac{d}{u \cdot \varepsilon_m} K. \qquad (92)$$

Allerdings ist die dazu erforderliche Rechenarbeit so erheblich, daß die praktische Verwendbarkeit der Formel (47) in Frage gestellt zu sein scheint. Es erweist sich daher als notwendig, die nötigen Rechnungen ein für allemal durch Aufstellung einer geeigneten Tabelle, aus der K ohne Rechnung zu entnehmen sein muß, zu erledigen. Um für die Variabeln u, v den richtigen Wertebereich auszuwählen, ist zu beachten, daß sie durch die Bedingung

$$v < \pi < u$$

eingeschränkt sind, da ja stets

$$h \geqq 2r$$
$$r < d$$

sein muß. Als für die Anwendung geeignet wurden die Werte

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{\pi} &= 1{,}2 \quad 1{,}4 \quad 1{,}6 \quad 1{,}8 \\ \frac{v}{\pi} &= 0{,}5 \quad 0{,}6 \quad 0{,}7 \quad 0{,}8 \quad 0{,}9 \end{aligned}\right\} \qquad (93)$$

ausgewählt. Indem dann bei festgehaltenem u das v in $K = K(u, v)$ variiert wurde, entstand die Tabelle 15. Stellt man die so gewonnenen Potentialwerte nach der



Tabelle 15. Das Gitterpotential $K = K(u, v)$ für $1{,}2 \leqq \frac{u}{\pi} \leqq 1{,}8$ und $0{,}5 \leqq \frac{v}{\pi} \leqq 0{,}9$.

$\downarrow = \frac{v}{\pi}$ \ $\rightarrow = \frac{u}{\pi}$	1,2	1,4	1,6	1,8
0,5	2,784	3,414	4,043	4,671
0,6	2,406	3,037	3,667	4,295
0,7	2,041	2,676	3,306	3,934
0,8	1,687	2,326	2,958	3,587
0,9	1,340	1,987	2,623	3,253

bei zwei Variablen üblichen Weise im Bild 16 graphisch dar, so fällt der im Intervall $0{,}5 \leqq \frac{v}{\pi} \leqq 0{,}9$ mit u und v lineare Anstieg bzw. Abfall des Potentials ins Auge. Obwohl praktisch ohne Bedeutung, wurde K auch für das Gebiet:

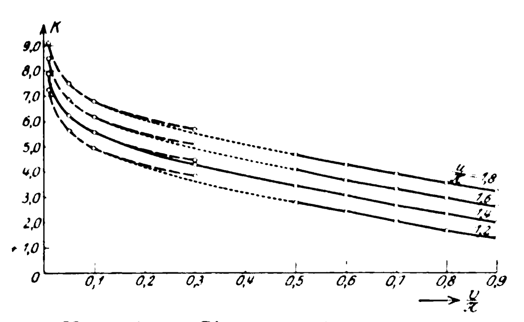


Bild 16. Verlauf des Gitterpotentials (erste Anordnung).
—— ——— berechnet nach (84),
— — berechnet nach (96),
············ Interpolation.

$$0 \leqq \frac{v}{\pi} \leqq 0{,}3$$

berechnet, und zwar mit Hilfe einer auf folgendem Wege zu gewinnenden Näherungsformel.

Für kleine v, aber beliebige u, d. h. im Falle eines kleinen Drahtquerschnitts wird nämlich Φ_0 gegen die folgenden Korrektionsglieder des Ansatzes (69) ausschlaggebend. Da sich dann nach (76) ϱ der Einheit und ω der Null nähert, da ferner für die in Frage stehenden Werte von $(u > \pi)$ e^{-4u} gegen e^{-2u} zu vernachlässigen ist, so folgt aus (79)

$$P_1' = \sqrt{1 - 2\, e^{-2u}}$$

oder

$$P_1' \underset{v \ll \pi}{=} 1 - e^{-2u}. \tag{94}$$

Um den entsprechenden Grenzwert für P_1 zu erhalten, entwickeln wir (74)

$$e^{\frac{2\pi z}{h}} - 1 = P_1 \cdot e^{i\,\Omega_1}$$

nach Potenzen von $z = r\, e^{i\,\vartheta}$ und erhalten

$$v \cdot e^{i\,\vartheta} = P_1 \cdot e^{i\,\Omega_1}$$

oder

$$v = P_1 \cdot e^{i\,(\Omega_1 - \vartheta)}.$$

Da aber v reell ist, so muß

$$\Omega_1 = \vartheta$$

sein, d. h.

$$\underset{v \ll \pi}{P_1} = v. \tag{95}$$

Mit (94), (95) ergibt (81) für kleine v den Näherungswert

$$\underset{v \ll \pi}{K} = u + \log \frac{1 - e^{-2u}}{v}. \tag{96}$$

Nach dieser Formel wurde das Potential im Gebiet

$$0 \leqq \frac{v}{\pi} \leqq 0{,}3$$

berechnet und in Bild 16 eingetragen. Wie man ihr entnimmt, ist sogar hier (d. h. für $0 \leqq \frac{v}{\pi} \leqq 0{,}3$) noch die Linearität in u gewahrt geblieben. Die nach (96) und nach der allgemeinen Methode berechneten Kurven wurden schließlich extrapolatorisch verbunden, wobei die Richtigkeit der Extrapolation durch Vergleich mit der vollständig berechneten und durch Ausziehen in Bild 16 kenntlich gemachten Kurve $u = 1{,}4 \cdot \pi$ sichergestellt wurde. Der Wert K kann somit zwar unmittelbar aus dem Bild 16 entnommen werden, doch ist die dabei vorzunehmende graphische Interpolation wegen der zwei unabhängigen Variablen u, v nicht grade sehr bequem. Wir entwickeln deshalb für das Gebiet

$$0{,}5 \leqq \frac{v}{\pi} \leqq 0{,}9$$

eine für numerische Interpolation geeignete Formel. Wegen der dort vorhandenen Linearität des Potentials in u und v können wir nämlich setzen:

$$K(u, v) = K_0 + m_1 \cdot v + m_2 u. \tag{97}$$

Durch spezielle Wahl von $u, v = u_1 v_1,\ u_2 v_2$ folgt daraus:

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{v_2 - v_1}\left\{K(u_1 v_2) - K(u_1 v_1)\right\} \\ m_2 &= \frac{1}{u_2 - u_1}\left\{K(u_2 v_1) - K(u_1 v_1)\right\} \\ &\text{und} \\ 2K_0 &= K(u_1 v_1) + K(u_2 v_1) - 2 m_1 v_1 - m_2(u_1 + u_2). \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Wählen wir die extremsten Wertepaare

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= 0{,}5 \cdot \pi & u_1 &= 1{,}2 \cdot \pi \\ v_1 &= 0{,}9 \cdot \pi & u_2 &= 1{,}8 \cdot \pi \\ &\text{so ergibt sich} \\ m_1 &= -1{,}15 \\ m_2 &= 1{,}00 \\ K_0 &= 0{,}81, \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

womit die Näherungsformel (97) übergeht in:

$$K = 0{,}81 - 1{,}15\, v + u. \tag{100}$$

Um einen Anhaltspunkt über ihren Genauigkeitsgrad zu erhalten, wurde nach ihr das Gitterpotential ebenfalls für den Bereich (93) berechnet und in Tabelle 17 zusammengestellt. Wie der Vergleich mit Tabelle 15 zeigt, liefert (100) die Potentialwerte auf etwa 1 % genau. Die nunmehr gewonnene, wirklich brauchbare Lösung unseres Potentialproblems gestattet es, den Korrektionswert d' in jedem Falle schnell zu bestimmen. Wie sehr die praktische Verwendbarkeit unserer Frequenzformel (47) dadurch gesteigert ist, mögen folgende Beispiele zeigen, die Beobachtungen von Ridder entnommen sind.

Tabelle 17. Berechnung von K auf Grund der Formel (100).

$\downarrow \frac{v}{\pi}$ \ $\rightarrow = \frac{u}{\pi}$	1,2	1,4	1,6	1,8
0,5	2,77	3,40	4,02	4,65
0,6	2,41	3,04	3,66	4,29
0,7	2,05	2,68	3,30	3,93
0,8	1,69	2,32	2,94	3,57
0,9	1,32	1,95	2,57	3,20

Gegeben seien drei mit I, II, III bezeichnete Spulen von nachstehenden Dimensionen:

Spule	2 L (in m)	2 l (in cm)	R (cm)	d (cm)	h (cm)	2 r (cm)
I	386	30,23	9,35	0,05	0,079	0,055
II	472	21,15	10,67	0,04	0,055	0,05
III	556	51,07	6,95	0,05	0,075	0,06

Hieraus ergeben sich folgende Werte:

Spule	α	u	v	K	d′	$-\frac{\pi}{2} H_1^{(1)}(i\alpha)$	$-i J_1(i\alpha)$	$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \lambda_1$ (m)
I	0,97	3,98	2,19	2,27	0,0285	0,6363	0,5443	5820
II	1,58	4,57	2,86	2,10	0,0184	0,2480	1,0635	8255
III	0,43	4,19	2,51	2,11	0,0252	2,0260	0,2200	8718

Das Potential K wurde nach Formel (100) berechnet, die Werte für die Hankelsche und Besselsche Funktion den Tabellen von Jahnke und Emde entnommen. Die von Ridder beobachteten Wellenlängen sind nach einer vorläufigen Mitteilung:

Spule	λ_1 (m)
I	12 550
II	17 850
III	18 500

Das Verhältnis zwischen gemessenen und errechneten Werten ist gleich der Quadratwurzel aus den Dielektizitätskonstanten des die Windungen isolierenden Materials und ergibt sich zu

Spule	$\sqrt{\varepsilon} = \frac{\lambda_1 \text{ gemessen}}{\lambda_1 \text{ berechnet}}$
I	2,16
II	2,16
III	2,12

Über die Dielektrizitätskonstante des bei Ridder zwischen den Lagen befindlichen Preßspans konnte leider nichts Exaktes erfahren werden. Der Wert E etwa gleich 4 erscheint indessen durchaus bei diesem Material wie bei damit verwandten annehmbar.

Vektorielle Darstellung der Lorentztransformation.

Von

Jean Spielrein, Moskau.

Die spezielle Relativitätstheorie Einsteins beruht bekanntlich auf der Annahme, daß Raum- und Zeitmaße eines Bezugsystems von seinem Bewegungszustand abhängig sind. Bewegt sich ein Achsenkreuz o x′ y′ z′ mit einer bestimmten Translationsgeschwindigkeit gegenüber einem festen Achsenkreuz o x y z, so werden die Koordinaten x′, y′, z′ eines jeden Punktes und das dem bewegten Achsenkreuz eigene Zeitmaß t′ ganz bestimmte Funktionen der Koordinaten x, y, z und der Zeit t des festen Systems sein. Der Übergang von den Größen x, y, z, t zu x′, y′, z′ t′ wird durch die Lorentztransformation gegeben. Im vorliegenden Aufsatz wird eine koordinatenfreie Darstellung dieser Transformation gegeben, zunächst für den Fall einer linearen Bewegung und dann für eine beliebige Translationsbewegung im Raume.

I. Analytische Vorbereitung.

Wir bestimmen einen Punkt P mit den Koordinaten x, y durch den Ausdruck

$$\check{z} = x + \Delta x. \tag{1}$$

Bei den algebraischen Operationen mit $\check{z}$ ist Δ wie eine gewöhnliche algebrasche Größe zu behandeln, nur ist immer Δ^2 durch $+1$ zu ersetzen (nicht durch -1, wie es für die imaginäre Einheit der Fall ist). Wir können nun, in Anlehnung an die Theorie gewöhnlicher komplexer Größen eine Anzahl Sätze für die Rechnung mit den Größen von der Form $x + \Delta y$ einführen. Zunächst setzen wir:

$$x + \Delta y = \varrho e^{\psi} = \varrho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n \psi^n}{n!}. \tag{2}$$
$$= \varrho \operatorname{Cos} \psi + \Delta \varrho \operatorname{Sin} \psi$$

mit

$$\varrho^2 = x^2 - y^2, \qquad \operatorname{Tg} \psi = \frac{y}{x}, \qquad \operatorname{Cos} \psi = \frac{x}{\varrho}, \qquad \operatorname{Sin} \psi = \frac{y}{\varrho}, \qquad x > y.$$

[Für $x < y$ wäre zu setzen: $x + \Delta y = \Delta(y + \Delta x)$].

Bleibt ϱ konstant, so bewegt sich, bei Änderung von ψ der Punkt P auf einer Hyperbel

$$x^2 - y^2 = \text{const.}, \tag{3}$$

bleibt ψ konstant, so bewegt sich bei Änderung von ϱ, der Punkt P auf einer Geraden.

$$\frac{y}{x} = \text{const.} \tag{4}$$

Wir betrachten jetzt zwei Punkte, P_1 und P_2, dargestellt durch

$$\check{z}_1 = x_1 + \Delta y_1 = \varrho_1 e^{\Delta \psi_1}$$

und

$$\check{z}_2 = x_2 + \Delta y_2 = \varrho_2 e^{\Delta \psi_2}.$$

Es ergeben sich folgende Rechnungsregeln:

Addition:

$$\check{z}_1 + \check{z}_2 = x_1 + x_2 + \Delta(y_1 + y_2). \tag{5}$$

Multiplikation:

$$\check{z}_1 \check{z}_2 = x_1 x_2 + y_1 x_2 + \Delta(x_1 y_2 + y_1 x_2) = \varrho_1 \varrho_2 e^{\Delta(\psi_1 + \psi_2)}. \tag{6}$$

Division:



$$\left.\begin{aligned}\frac{\check{z}_1}{\check{z}_2} &= \frac{(x_1 + \varDelta y_1)(x_2 - \varDelta y_2)}{(x_2 + \varDelta y_2)(x_2 - \varDelta y_2)} = \frac{x_1 x_2 - y_1 y_2 + \varDelta(-x_1 y_2 + y_1 x_2)}{x_2^2 - y_2^2}. \\ &= \frac{\varrho_1}{\varrho_2} e^{\varDelta(\psi_1 - \psi_2)}.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Man sieht, daß die Multiplikation des Ausdruckes $\check{z}_1 = x_1 + \varDelta y_1$ mit $e^{\varDelta \psi_2}$ einer Verschiebung des Punktes auf der Hyperbel

$$x^2 - y^2 = x_1^2 - y_1^2 = \text{const.}$$

entspricht. Bei den gewöhnlichen komplexen Größen entspricht die Multiplikation von $z_1 = x_1 + iy_1$ mit $e^{i\varphi}$ einer Verschiebung auf dem Kreis

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2 = \text{const.},$$

d. h. einer Drehung des durch z_1 dargestellten Radiusvektors. Es erscheint deswegen angebracht, bei der Multiplikation mit $e^{\varDelta \psi_2}$ von einer hyperbolischen Drehung zu reden und die Ausdrücke der Form $x < \varDelta y$ als Hyperbelkomplexe zu bezeichnen.

Wir bilden jetzt die x, y-Ebene auf eine u, v-Ebene ab, indem wir jedem Punkt P einen Punkt P' mit den Koordinaten u, v zuordnen, den wir durch den Ausdruck

$$\check{w} = u + \varDelta v \qquad (8)$$

darstellen wollen. Die Koordinaten u, v sind Funktionen von x, y. Wir wollen aber sagen, daß $\check{w}$ dann und nur dann eine analytische Funktion von $x + \varDelta y$ ist, wenn der Ausdruck

$$\frac{d\check{w}}{d\check{z}} = \frac{du + \varDelta dv}{dx + \varDelta dy} \qquad (9)$$

unabhängig ist von $\frac{dy}{dx}$. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (10)$$

Geometrisch besagen diese Bedingungen, daß der durch $\check{w}$ dargestellte Vektor mit den Projektionen u, v wirbelfrei aber nicht quellenfrei sein muß, daß aber sein Spiegelbild in bezug auf eine feste Richtung der u, v-Ebene quellenfrei, aber nicht wirbelfrei sein muß. (Vgl. mit einer gewöhnlichen komplexen Funktion $w = u + iv$ eines komplexen Argumentes $z = x + iy$, wo der Vektor mit den Projektionen u, v sowohl Wirbel als auch Quellen hat, sein Spiegelbild aber an einer beliebigen festen Richtung der u, v-Ebene quellen- und wirbelfrei sein muß.) Die Gleichungen (10) können umgerechnet werden zu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \qquad (10a)$$

Die Integration ergibt:

$$\left.\begin{aligned} u &= f(x + y) + g(x - y) \\ v &= f(x + y) - g(x - y) \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} u + v &= 2f(x + y) \\ u - v &= 2g(x - y) \end{aligned}\right\}, \qquad (11a)$$

wo f und g willkürliche Funktionen sind. Hieraus folgt, daß durch Angabe der Werte von $\check{w}$ auf einer geschlossenen Kurve L die Funktionen $\check{w}$ auch für jeden Punkt P im Inneren von L bestimmt ist. Zum Beweis genügt es, durch den Punkt P die beiden Geraden $x + y = \text{const.}$ und $x - y = \text{const.}$ zu ziehen (Bild 1). Diese Geraden schneiden die Kurven L in einer geraden Anzahl Punkte. Nach (11) bleibt $u + v$ konstant auf der Geraden CD,

$$u + v = u_C + v_C;$$

und ebenso

$$u - v = u_A - v_A$$

auf AB. Für den Schnittpunkt P gilt also

$$\left.\begin{aligned} u &= {}^1/_2\,(u_A + u_C) + {}^1/_2\,(v_C - v_A) \\ v &= {}^1/_2\,(u_C - u_A) + {}^1/_2\,(v_C + v_A). \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Umgekehrt, ist $\check{w}$ auf einer Strecke AB bekannt, so ist dadurch $\check{w}$ innerhalb eines Parallelogramms bestimmt, das durch die zu $x + y = \text{const.}$, $x - y = \text{const.}$ parallelen Geraden gebildet werden kann (Bild 2). Man sieht auch, daß sich die Funktion $u + \Delta v = F(x + \Delta y)$ auf zwei unabhängige Funktionen reduzieren läßt, eine Funktion von $x + y$ und eine Funktion von $x - y$. Es ist aber trotzdem interessant, die durch die ganze Funktion $F(x + \Delta y)$ dargestellten Abbildungen zu studieren.

Zunächst ist es klar, daß die Funktion

$$\check{w} = F(\check{z})$$

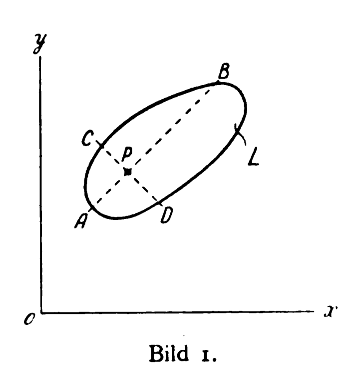


Bild 1.

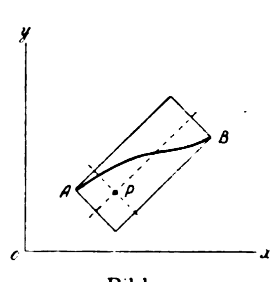


Bild 2.

keine konforme Abbildung darstellt; die Abbildung ist nicht winkeltreu, sie stellt aber eine Flächenvergrößerung dar, die für jedes Parallelogramm aus $dx + \Delta dy$ und $\delta x + \Delta \delta y$ unabhängig vom Winkel zwischen $dx + \Delta dy$ und $\delta x + \Delta \delta y$ ist. Dem Parallelogramm $dx\,\delta y - dy\,\delta x$ entspricht das Parallelogramm $du\,\delta v - dv\,\delta u$, und man kann leicht beweisen, daß

$$\frac{du\,\delta v - dv\,\delta u}{dx\,\delta y - dy\,\delta x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \qquad (13)$$

Man beweist auch leicht folgende Sätze:

I. $x + \Delta y$ ist eine analytische Funktion von $\check{z} = x + \Delta y$.

II. $\check{z} + \check{\mu}$ ist eine a. F. von $\check{z}$ ($\check{\mu} = m + \Delta n = \text{const.}$).

III. $\check{\mu}\check{z}$ ist eine a. F. von $\check{z}$.

IV. Das Produkt zweier a. F. ist wieder eine a. F. von $\check{z}$.

V. Der Quotient zweier a. F. ist eine a. F. von $\check{z}$.

Aus diesen Sätzen kann man zu Potenzensummen kommen, die analytische Funktionen von $\check{z}$ sind, wobei noch einige Konvergenzschwierigkeiten zu überwinden sind. Wir wollen aber hier darauf nicht weiter eingehen und gehen jetzt zu den Anwendungen über.

II. Die Lorentztransformation.

Wir betrachten die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Geraden ox und messen die Zeit t durch den „Lichtweg" $y = ct$, wo c die konstante Lichtgeschwindigkeit ist. Die Koordinaten x, y eines „Weltpunktes" P bestimmen, nach

Lage und Zeit, die Bewegung des materiellen Punktes. Unter Zuhilfenahme der Hyperbelkomplexe können wir jeden Punkt der x, y-Ebene durch die komplexe Größe $\check{z}$ darstellen:

$$\check{z} = y + \Delta x = \varrho e^{\Delta \psi}, \tag{14}$$

wo

$$\varrho^2 = c^2 t^2 - x^2, \qquad \mathfrak{Tg}\, \psi = \frac{x}{y} < 1. \tag{15}$$

Die Gleichungen (15) gelten für alle Punkte, deren Koordinaten der Ungleichheit $y^2 > x^2$ genügen. Solche Punkte heißen bekanntlich „zeitartig". Dagegen für „raumartige" Punkte, für die $x^2 > y^2$, müssen die Gleichungen (15) durch

$$\varrho^2 = x^2 - c^2 t^2, \qquad \mathfrak{Tg}\, \psi = \frac{y}{x} < 1 \tag{15a}$$

ersetzt werden. Die Asymptoten $x^2 - y^2 = 0$ zerlegen die ganze Ebene in zwei Teile; die Richtungen dieser Asymptoten sind ausgezeichnete Richtungen in der Ebene. Folglich ist die durch diese Ebene veranschaulichte zweidimensionale Raum-Zeitmannigfaltigkeit nicht isotrop, die Zeitachse oy ist wesentlich verschieden von der Raumachse ox.

Bewegt sich der materielle Punkt auf ox mit einer konstanten Geschwindigkeit v, so beschreibt der Punkt P eine Gerade oP (Bild 3), deren Gleichung

$$\frac{x}{y} = \frac{vt}{ct} = \frac{v}{c} = \beta = \mathfrak{Tg}\, \psi_1 = \text{const.} \tag{16}$$

ist. Die Lorentztransformation besteht nun darin, daß man diese Bewegung „auf Ruhe" transformiert, d. h. neue Koordinaten x', y' = ct einführt, für die die Gerade oP parallel der y-Achse wird. Eine solche Transformation ist gegeben durch

$$\check{z}' = \check{z} e^{-\Delta \psi_1} = \varrho e^{\Delta(\psi - \psi_1)} \tag{17}$$

oder ausführlich:

$$x' = x\, \mathfrak{Cof}\, \psi_1 - y\, \mathfrak{Sin}\, \psi_1 = \frac{x - \beta y}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$y' = y\, \mathfrak{Cof}\, \psi_1 - x\, \mathfrak{Sin}\, \psi_1 = \frac{y - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Umgekehrt wird aus (17)

$$\check{z} = \check{z}' e^{\Delta \psi_1} = \varrho e^{\Delta(\psi' + \psi_1)} \tag{18}$$

oder

$$x = x'\, \mathfrak{Cof}\, \psi_1 + y'\, \mathfrak{Sin}\, \psi_1 = \frac{x' + \beta y'}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

$$y = y'\, \mathfrak{Cof}\, \psi_1 + x'\, \mathfrak{Sin}\, \psi_1 = \frac{y' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Der feste Beobachter beschreibt seine Wahrnehmung so, daß er in einem rechtwinkligen Koordinatensystem x, y die durch den Endpunkt von $\check{z}$ beschriebenen Linien einzeichnet. Der mitbewegte Beobachter beschreibt seine Beobachtungen bei der Wahrnehmung derselben Erscheinungen, indem er in einem (ebenfalls rechtwinkligen) Koordinatensystem x', y' die durch den Endpunkt von $\check{z}'$ beschriebenen Linien einzeichnet. Die Linien des Koordinatensystems x', y' stellen eine Abbildung der Linien im Koordinatensystem x, y dar und das Gesetz der Abbildung, die Lorentztransformation, ist durch die Gleichung (17) gegeben.

Die Lorentztransformation läßt sämtliche Hyperbeln $\varrho^2 = \text{const.}$ unverändert. Alle durch o gehenden Geraden bleiben auch nach der Transformation gerade, nur



werden sie, entsprechend der Änderung von ψ gedreht (vgl. Bild 4). Jeder Punkt P verschiebt sich dabei auf der durch ihn gehenden Hyperbel.

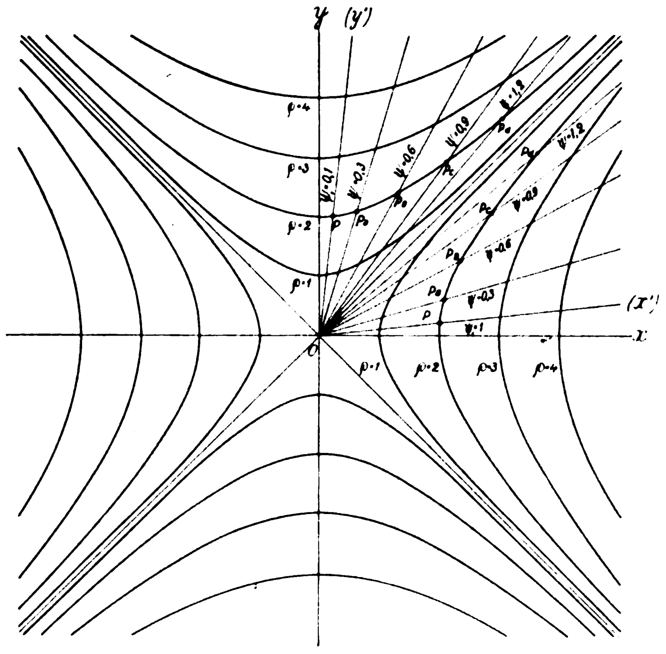


Bild 3. Die „Welt" eines relativ zu o x festen Beobachters.

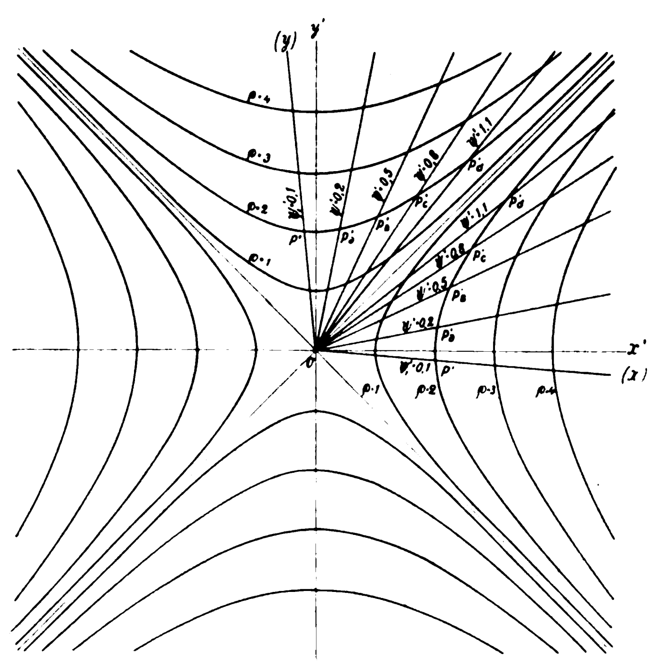


Bild 4. Die „Welt" eines bewegten Beobachters, als Abbildung des Bildes 3.

Betrachten wir nun ein Element der Weltlinie

$$d\check{z} = c\, d\tau\, e^{i\varphi}, \tag{19}$$

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2, \qquad \mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{dx}{c\, dt}.$$

Man kann dieses Element „auf Ruhe" transformieren, indem man ein Bezugssystem ox', oy' wählt, dessen y-Achse mit der Richtung des transformierten Elementes der Weltlinie zusammenfällt. Es genügt zu setzen:

$$d\check{z}' = d\check{z}\, e^{-\Delta\varphi} = c\, d\tau. \tag{20}$$

Die Größe $d\tau$ heißt die Eigenzeit dieses Elementes der Weltlinie. In der Relativitätstheorie wird die verallgemeinerte Geschwindigkeit dadurch definiert, daß man das Element $d\check{z}$ der Weltlinie durch seine Eigenzeit und durch die Lichtgeschwindigkeit dividiert. Man erhält also, nach dieser Definition, für die Geschwindigkeit im Bezugssystem ox, oy den Ausdruck

$$\frac{d\check{z}}{c\, d\tau} = e^{\Delta\varphi}. \tag{21}$$

Der Betrag v der gewöhnlichen Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$\mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{dx}{c\, d\tau} : \frac{c\, dt}{c\, d\tau} = \frac{dx}{c\, dt} = \frac{v}{c}. \tag{22}$$

Hieraus kann man leicht das Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten ableiten. Ein materieller Punkt bewege sich relativ zu einem Bezugssystem ox', oy' mit einer Geschwindigkeit v''. Das Element der Weltlinie dieses Punktes wird dargestellt in diesem System durch

$$d\check{z}' = c\, d\tau\, e^{\Delta\varphi''}, \qquad \mathfrak{Tg}\,\varphi'' = \frac{v''}{c},$$

wo $d\tau$ die Eigenzeit dieses Elementes ist. Bewegt sich aber der Bezugspunkt o des Systems ox', oy' mit einer Geschwindigkeit v' relativ zu einem festen Bezugssystem ox, oy, so wird in diesem System das entsprechende Element der Weltlinie dargestellt durch

$$d\check{z} = d\check{z}'\, e^{\Delta\varphi'} = c\, d\tau\, e^{\Delta(\varphi' + \varphi'')}, \qquad \mathfrak{Tg}\,\varphi' = \frac{v'}{c},$$

so daß, wegen (21), die verallgemeinerte Geschwindigkeit des materiellen Punktes gegeben ist durch:

$$\frac{d\check{z}}{c\, d\tau} = e^{\Delta(\varphi' + \varphi'')} = e^{\Delta\varphi}, \qquad \mathfrak{Tg}\,\varphi = \frac{v}{c};$$

hieraus folgt aber

$$\mathfrak{Tg}\,\varphi = \mathfrak{Tg}\,(\varphi' + \varphi'') = \frac{\mathfrak{Tg}\,\varphi' + \mathfrak{Tg}\,\varphi''}{1 + \mathfrak{Tg}\,\varphi'\,\mathfrak{Tg}\,\varphi''}$$

oder

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{c}\,\frac{v' + v''}{1 + \frac{v'\,v''}{c^2}}. \tag{23}$$

Wir wollen noch die Weltlinie eines Punktes bestimmen, dessen „Ruhebeschleunigung" konstant ist. Die Geschwindigkeit des Punktes sei in jedem Augenblick dargestellt durch

$$\frac{d\check{z}}{c\, d\tau} = e^{\Delta\varphi}.$$

Die Änderung der Geschwindigkeit, dividiert durch die Eigenzeit, ist gleich der Beschleunigung,

$$\frac{1}{c}\,\frac{d^2\check{z}}{d\tau^2} = \frac{d\, e^{\Delta\varphi}}{d\tau} = \Delta\, e^{\Delta\varphi}\,\frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Der Beschleunigungsvektor bildet mit ox denselben Winkel, wie der Geschwindigkeitsvektor mit oy. Das sind die Richtungen konjungierter Durchmesser der Hyperbel.

Unter „Ruhebeschleunigung“ versteht man die Beschleunigung in einem mitbewegten System, relativ zu dem der bewegte Punkt ruht. Die Lorentztranzformation auf ein solches System erhält man durch Multiplikation mit $e^{-\Lambda\varphi}$:

$$\frac{1}{c}\frac{d^2\check{z}}{d\tau^2}e^{-\Lambda\varphi} = \Lambda\frac{d\varphi}{d\tau} = \Lambda\frac{b}{c} = \text{const.}$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{b}{c}\tau,$$

$$\frac{d\check{z}}{c\,d\tau} = e^{\Lambda\left(\varphi_0 + \frac{b}{c}\tau\right)},$$

$$\check{z} - \check{z} = c\int_0^\tau e^{\Lambda\left(\varphi_0+\frac{b}{c}\tau\right)}d\tau = \frac{\Lambda}{\frac{b}{c^2}}e^{\Lambda\left(\varphi_0+\frac{b}{c}\tau\right)} - \frac{\Lambda}{\frac{b}{c^2}}e^{\Lambda\varphi_0},$$

$$\frac{b}{c^2}\Lambda\check{z} = e^{\Lambda\left(\varphi_0+\frac{b}{c}\tau\right)} + \text{const.} \tag{24}$$

Man sieht, daß die Weltlinie eine Hyperbel ist. Bei konstanter Ruhebeschleunigung nähert sich die Geschwindigkeit des bewegten Punktes asymptomisch der Lichtgeschwindigkeit. Die Achse dieser gleichschenkligen Hyperbel ist gleich $\frac{c^2}{b}$.

III. Vektorielle Darstellung.

Wir benutzen einen fetten Punkt als Zeichen der dyadischen Multiplikation, so daß $\mathfrak{a} \bullet \mathfrak{b}$ eine Dyade (linearer Tensor zweiter Stufe) darstellt. Den ersten Skalar dieser Dyande (deren Verjüngung) bezeichnen wir mit $\mathfrak{a} \bullet \mathfrak{b}$. Das skalare Produkt (Multiplikation mit nachfolgender Verjüngung) zweier Dyaden $\mathfrak{a} \bullet \mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c} \bullet \mathfrak{d}$ bezeichnen wir durch bloßes Nebeneinanderschreiben dieser Dyaden:

$$(\mathfrak{a} \bullet \mathfrak{b})(\mathfrak{c} \bullet \mathfrak{d}) = \mathfrak{a} \bullet \mathfrak{b}\,\mathfrak{c} \bullet \mathfrak{d}.$$

Dasselbe gilt für Dyadensummen.

Wir wählen nun zwei zueinander senkrechte Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$ und führen den Tensor ein:

$$\Lambda = \mathfrak{t} \bullet \mathfrak{s} + \mathfrak{s} \bullet \mathfrak{t}, \tag{25}$$

so daß

$$\Lambda^2 = \mathfrak{t} \bullet \mathfrak{t} + \mathfrak{s} \bullet \mathfrak{s}, \qquad \Lambda^3 = \Lambda, \qquad \text{usw.}$$

Λ^2 spielt in der $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}$-Ebene die Rolle der Einheit. Wir betrachten ferner die Exponentialfunktion

$$e^{\Lambda\varphi} = | + \Lambda\frac{\psi}{1!} + \Lambda^2\frac{\psi^2}{2!} + \ldots\ldots \tag{26}$$

$$= | - \Lambda^2 + \Lambda \operatorname{Sin}\psi + \Lambda^2 \operatorname{Cos}\psi.$$

Dieser Ausdruck gilt im Raume beliebiger Dimensionszahl. Dabei ist $|$ gleich dem Einheitstensor (Grundtensor) in diesem Raume. Dann spielt $| - \Lambda^2$ die Rolle der Einheit für den zu $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{s}$ senkrechten Teil des Raumes und Λ^2 die Rolle der Einheit für die $\mathfrak{t}, \mathfrak{s}$-Ebene.

Zur Untersuchung der Bewegungsvorgänge in dem dreidimensionalen Raume R_3 führen wir noch eine auf R_3 senkrechte Richtung $\mathfrak{t}$ ein, die als Zeitachse dienen soll. Die Raumzeitlage eines jeden materiellen Punktes wird dann in der euklidischen vierdimensionalen „Welt“ R_4 durch einen Weltpunkt P dargestellt. Die Lage dieses Punktes bestimmen wir durch einen vierdimensionalen Radiusvektor $\mathfrak{r}$. Die Zeit-



achse $\mathfrak{t}$ hat eine ausgezeichnete Richtung im Raume. Jeder „zeitartige" Vektor $\mathfrak{r}$ kann dargestellt werden durch

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{t}\,\varrho\, e^{A\psi}. \tag{26}$$

Der Einheitsheitsvektor $\mathfrak{t}$ wird zuerst im Verhältnis $\varrho : 1$ gestreckt, dann wird sein Endpunkt in der durch A bestimmten Ebene um einen durch ψ bestimmten Hyperbelbogen verschoben.

Wir betrachten jetzt eine Weltlinie im vierdimensionalen, euklidischen Raum. Ein Element dieser Weltlinie kann dargestellt werden durch

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{t}\, ds\, e^{A_1\psi_1}, \tag{27}$$

wo

$$\mathfrak{Tg}\,\psi_1 = \frac{v}{c}, \qquad A_1 = \mathfrak{t} \bullet \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_1 \bullet \mathfrak{t}$$

ist. ψ_1 und A_1 bestimmen, nach Größe und Richtung, die dreidimensionale Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ des betreffenden Punktes, denn es ist

$$\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{s}_1. \tag{28}$$

Man kann das Weltlinienelement $d\mathfrak{r}$ „auf Ruhe" transformieren, d. h. auf ein mitbewegtes Bezugssystem beziehen. Es genügt zu setzen:

$$d\mathfrak{r}' = d\mathfrak{r}\, e^{-A_1\psi_1} = \mathfrak{t}\, ds. \tag{29}$$

Das Weltlinienelement erscheint im gestrichelten System parallel zur Zeitachse, d. h. der Punkt ruht in diesem Augenblick im neuen Bezugssystem. Die Strecke ds kann proportional der Eigenzeit von $d\mathfrak{r}$ gesetzt werden, $ds = c\,d\tau$, so daß man für die vierdimensionale „Geschwindigkeit" des Weltpunktes erhält:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{c\,d\tau} = \mathfrak{t}\, e^{A_1\psi_1}. \qquad (30$$

Die durch (29) definierte Lorentztransformation bestimmt eine Abbildung eines jeden Radiusvektors $\mathfrak{r}$ im festen Bezugssystem auf einen entsprechenden Radiusvektor $\mathfrak{r}'$ im bewegten System,

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}\, e^{-A_1\psi_1} = \mathfrak{r}\,(1 - A_1{}^2) - \mathfrak{r}\, A_1\, \mathfrak{Sin}\,\psi_1 + \mathfrak{r}\, A_1{}^2\, \mathfrak{Cos}\,\psi_1. \tag{31}$$

Man sieht, die Lorentztransformation verändert nur die zu der $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{s}$-Ebene parallele Komponente des Radiusvektors, läßt dagegen die zu dieser Ebene senkrechte Komponente unverändert.

Im Falle einer zu $\mathfrak{s}_1$ parallelen Bewegung bleibt auch Δ konstant und gleich $\mathfrak{t} \bullet \mathfrak{s}_1 + \mathfrak{s}_1 \bullet \mathfrak{t}$. Im allgemenen ist aber A auf der Weltlinie von Punkt zu Punkt verschieden. Es ist auch, im allgemeinen, $e^{A_1\psi_1} e^{A_2\psi_2} \neq e^{A_2\psi_2} e^{A_1\psi_1}$. Folglich wird man bei der Addition von Bewegungen auch auf die Reihenfolge der Summanden acht geben müssen.

Wir sehen, daß es gelingt, die Lorentztransformation durch einen einzelnen Faktor $e^{A\psi}$ darzustellen. Ebenso lassen sich auch die Beziehungen der Einsteinschen Kinematik und Elektrodynamik invariant, d. h. ohne Zuhilfenahme von Koordinaten darstellen; zu dieser Darstellung muß man aber einen entsprechenden Algorythmus der vierdimensionalen Vektorrechnung benutzen.



Die Eigenfrequenzen einlagiger Spulen.

Bemerkung zu dem Aufsatze des Herrn J. Kruithof

von

Karl Willy Wagner.

Im Archiv für Elektrotechnik Band 11 Seite 77—84 hat Herr J. Kruithof in dankenswerter Weise gezeigt, daß das von mir verwendete Kettenleiter-Schema einer einlagigen Drahtspule[1]) je nach der Wahl der Grenzbedingungen sogenannte Eigenschwingungen erster Art oder zweiter Art ausführt. Dieses Ergebnis ist durchaus nicht merkwürdig. Nachdem jedoch ein besonderer Beweis dieser Tatsache für notwendig gehalten wurde, dürfte auch die folgende allgemeine Bemerkung über Eigenschwingungen nicht ganz überflüssig sein.

Sogenannte Eigenschwingungen erster Art und zweiter Art hat nicht nur die Spule, sondern jedes schwingungsfähige Gebilde mit mehreren Freiheitsgraden. Z. B. werden im gewöhnlichen homogenen Kabel Eigenschwingungen der einen oder der anderen Art erregt, je nachdem die Enden kurzgeschlossen oder isoliert sind. Nur war es in diesem Falle bisher nicht üblich, die Eigenschwingungen in solche erster und zweiter Art zu unterscheiden.

Diese Einteilung ist überdies nicht vollständig. Man kann den Eigenschwingungen erster und zweiter Art solche dritter Art, vierter Art und wenn man will, beliebiger Art an die Seite stellen. Es kommt nur auf die Grenzbedingungen an. Diese sind ja mit den beiden Alternativen „isoliert" oder „geerdet" (kurzgeschlossen) keineswegs erschöpft. Wer Freude an der Einführung neuer Bezeichnungen hat, mag z. B. von Eigenschwingungen dritter Art reden, wenn die Enden über eine Induktivität geschlossen sind; von Eigenschwingungen vierter Art bei Verbindung der Enden mit einem Kondensator; von Eigenschwingungen fünfter Art bei Verbindung der Enden über eine Induktivität in Serie mit einem Kondensator, und so fort.

Durch geeignete Wahl der Grenzbedingung kann man es sogar erreichen, daß die ersten n Eigenfrequenzen einer Spule oder einer Leitung usw. innerhalb gewisser Grenzen vorgeschriebene Werte annehmen, wobei n eine beliebige endliche Zahl sein kann.

[1]) Archiv f. Elektrot. Bd. 6, 1918, S. 301; siehe auch Bd. 7, 1918, S. 32.



Archiv für Elektrotechnik

XI. Band. 7./12. Heft. 1922.

Über elektrisch und magnetisch gekoppelte durch Elektronenröhren erregte Schwingungskreise.

Von

Kurt Heegner.

Teil I.

Diese und folgende Untersuchungen sollen eine umfassende Darstellung der Vorgänge in gekoppelten Kreisen, welche durch Rückkopplung zu Schwingungen erregt werden, geben. Die vorliegende Arbeit enthält die Ergebnisse, soweit sie auf Grund eines linearen Ansatzes gewonnen werden können. Außerdem wird über die Möglichkeiten des Auftretens beider Frequenzen berichtet werden. In Art. 2 und 14 sind die von Rogowski letzthin über diesen Gegenstand publizierten Arbeiten berücksichtigt[1]). Die Ergebnisse der Art. 2, 3, 13 sind mir seit langer Zeit geläufig, und sie werden aufgeführt, um eine vollständige Entwicklung zu erzielen.

1. Aufstellung einer allgemeinen Gleichung.

Wir gehen aus von einer bekannten vielfach zur Schwingungserzeugung verwendeten Schaltung (Bild 1). In den Anodenkreis der Röhre ist ein Schwingungs-

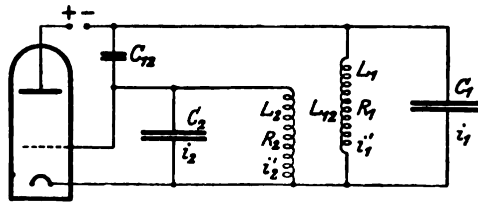


Bild 1.

kreis ($L_1 R_1 C_1$) gelegt, ebenso in den Gitterkreis ($L_2 R_2 C_2$). Diese beiden Kreise seien elektrisch und magnetisch miteinander gekoppelt (C_{12}, L_{12}). Den zur analytischen Darstellung der Vorgänge erforderlichen linearen Ansatz schreiben wir

$$i_a + S e_g + \frac{e_a}{R_i} = 0. \tag{1}$$

indem i_a den Anodenwechselstrom, e_a die Anodenwechselspannung und e_g die Gitterwechselspannung bedeutet, ferner S die Steilheit und R_i den inneren Widerstand der Röhre. In der Theorie der Verstärker pflegt man der Spannung e_g das entgegengesetzte Vorzeichen zu geben, weil sie als elektromotorische Kraft gedacht ist. In der Theorie der rückgekoppelten Schwingungen treten periodische elektromotorische Kräfte nicht auf, und insofern besteht der Ansatz (1).

Die Elimination von Strömen und Spannungen führt auf eine lineare homogene Differentialgleichung vierten Grades und aus dieser folgt eine algebraische Gleichung vierten Grades in $x = -d + j\omega$, so daß Dämpfung d und Frequenz ω sich berechnen lassen. Aus den Gleichungen

[1]) Rogowski, der Zwischenkreisröhrensender bei primärer, sekundärer Rückkopplung und bei beliebiger Mischung von primärer und sekundärer Rückkopplung. Bd. X. S. 1, 15, 209.

$$\left.\begin{array}{llll} i_1\left(1+\frac{1}{R_i C_1 x}\right)+i_1' & +\,i_2\left(1+\frac{S}{C_2 x}\right) & +\,i_2' & =0 \\ i_1\frac{1}{C_1 x} & -\,i_2\left(\frac{1}{C_2 x}+\frac{1}{C_{12} x}\right) & -\,i_2'\frac{1}{C_{12} x} & =0 \\ i_1\frac{1}{C_1 x} \quad -\,i_1'(L_1 x+R_1) & & +\,i_2' L_{12} x & =0 \\ \quad i_1' L_{12} x & +\,i_2\frac{1}{C_2 x} & -\,i_2'(L_2 x+R_2) & =0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

folgt

$$\begin{vmatrix} \left(C_1 x+\frac{1}{R_i}\right) & 1 & (C_2 x+S) & 1 \\ C_{12} x & 0 & -(C_2+C_{12})x & -1 \\ 1 & -(L_1 x+R_1) & 0 & L_{12} x \\ 0 & L_{12} x & 1 & -(L_2 x+R_2) \end{vmatrix}=0$$

oder $\qquad (3)$

$$\begin{vmatrix} \left(C_1' x+\frac{1}{R_i}\right) & 1 & (S-C_{12} x) & 0 \\ C_{12} x & 0 & -C_2' x & -1 \\ 1 & -(L_1 x+R_1) & 0 & L_{12} x \\ 0 & L_{12} x & 1 & -(L_2 x+R_2) \end{vmatrix}=0$$

Die erste Determinante entsteht, wenn die erste Spalte mit $C_1 x$, die dritte mit $C_2 x$ multipliziert wird, die zweite Zeile mit $C_{12} x$. Addiert man die zweite Zeile zu der ersten und setzt

$$C_1+C_{12}=C_1' \qquad\qquad C_2+C_{12}=C_2'$$

so folgt die zweite Determinante, die sich berechnet zu

$$\left.\begin{array}{c} \left[1+\left(C_1' x+\frac{1}{R_i}\right)(L_1 x+R_1)\right]\left[1+C_2' x(L_2 x+R_2)\right]+ \\ C_{12} x\,(S-C_{12} x)(L_1 x+R_1)(L_2 x+R_2)-L_{12} S+2\,C_{12} L_{12} x^2- \\ L_{12}^2 x^2\left[C_2' x\left(C_1' x+\frac{1}{R_i}\right)+C_{12} x(S-C_{12} x)\right]=0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Die Elimination von i_1 und i_2 aus den drei letzten Gleichungen in (2) ergibt:

$$i_1'\left[C_{12} x(L_1 x+R_1)+C_2' x L_{12} x\right]=i_2'\left[1+C_2' x(L_2 x+R_2)+C_{12} x L_{12} x\right]. \qquad (5)$$

Wird in (4) S zu Null angenommen, so stellt die Gleichung freie Schwingungen eines elektrisch und magnetisch gekoppelten Systems dar, dessen Primärkreis eine Ableitung $\frac{1}{R_i}$ besitzt, und die Dämpfungen der resultierenden Schwingungen sind stets positiv. Gleichung (4) wird daher vollständig, wenn auch der Sekundärkreis noch eine Ableitung G_2 erhält, was bei der Lage desselben an Gitter und Kathode der Röhre in Betracht zu ziehen ist. Dann ist $C_2' x + G_2$ für $C_2' x$ zu setzen und die Ausführung der Substitution auf der linken Seite in (5) ergibt:

$$i_1'\left[x(R_1 C_{12}+G_2 L_{12})+x^2(C_{12} L_1+C_2' L_{12})\right].$$

Der Ausdruck läßt erkennen, daß die Kreise für

$$C_{12} L_1+C_2' L_{12}=0 \qquad (6)$$

bis zu einem von R_1 und G_2 abhängenden Grade entkoppelt sind. Die Bedingung in (6) soll im folgenden als Entkopplung bezeichnet werden.

In der behandelten Schaltung wird die Rückkopplung in der Weise hergestellt, daß die am Sekundärkreis vorhandene induktive Spannung dem Gitter der Röhre zugeführt wird. Eine solche Art der Rückkopplung wird seit der Untersuchung von Vogel und Wien als sekundäre Rückkopplung bezeichnet. Die in (3) erhaltene Gleichung erscheint kompliziert, bei Verwendung geeigneter Methoden läßt sich ihr Inhalt in einfachster Weise darlegen, und es wird sich zeigen, daß ihr Geltungsbereich ein sehr viel allgemeinerer ist, als es bisher ausgesprochen wurde. Zunächst behandeln wir einige Spezialfälle.

2. Sekundäre Rückkopplung bei magnetischer Kopplung der Kreise.

Für $C_{12} = 0$ reduziert sich Gleichung (4) des vorigen Artikels auf

$$\left.\begin{aligned} &\left[\left(1+\frac{R_1}{R_i}\right)+x\left(R_1 C_1+\frac{L_1}{R_i}\right)+x^2 L_1 C_1\right]\left[1+R_2 C_2 x+L_2 C_2 x^2\right] \\ &\qquad -L_{12}\, x\, S-L_{12}{}^2 x^2 C_2\, x\left(C_1 x+\frac{1}{R_i}\right)=0. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Bei schnellen Schwingungen wird die durch die Elektroden des Gitters und der Anode und durch die Zuführungen gebildete elektrische Kopplung der Ausführung entgegenstehen. Dennoch beginnen wir mit diesem Fall, weil er ersichtlich der einfachste ist.

Für den stationären Zustand wird $x = j\omega$, und die Trennung von Reellem und Imaginärem ergibt:

$$\left.\begin{aligned} &\left(1+\frac{R_1}{R_i}-L_1 C_1 \omega^2\right)(1-L_2 C_2 \omega^2) = C_2 C_1 \omega^2\left[L_{12}{}^2 \omega^2+R_2\left(R_1+\frac{L_1}{R_i C_1}\right)\right] \\ &\left(1+\frac{R_1}{R_i}-L_1 C_1 \omega^2\right) R_2 C_2+(1-L_2 C_2 \omega^2)\left(R_1 C_1+\frac{L_1}{R_i}\right)+\frac{C_2}{R_i} L_{12}{}^2 \omega^2 = L_{12} S \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die Steilheit S tritt nur in der zweiten Gleichung auf, hingegen der innere Widerstand R_i in beiden Gleichungen. Ändern wir eine elektrische Größe der Schwingungskreise und zwar im folgenden C_2, so werden die Beziehungen sehr einfach, sobald wir S als abhängige Variabel und R_i als Konstante betrachten. Ein solches Verfahren ist nicht genau, da sich mit S notwendig auch R_i ändert. Aber für ein schwingendes auf Leistung arbeitendes Senderohr besteht keine analytische Beziehung zwischen S und R_i. Somit sind wir zunächst angewiesen, diesen vereinfachten Weg zu beschreiten und, indem für R_i der aus den Charakteristiken bei kleinen Änderungen von Strom und Spannung sich ergebende Wert gesetzt wird, ist ersichtlich, daß das Einsetzen der Schwingungen aus diesem Verfahren genau erhalten, der weitere Verlauf annähernd wiedergegeben wird.

Da es nur auf die Frequenzänderung in Abhängigkeit von der Änderung der Abstimmung des Gitterkreises ankommt, setzen wir noch:

$$\left.\begin{aligned} &\omega^2 = \omega^2\left(1+\frac{R_1}{R_i}\right) \qquad C_2 = C_2 \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_i}} \\ &(1-L_1 C_1 \overline{\omega}^2)(1-L_2 \overline{C}_2 \overline{\omega}^2) = C_1 \overline{C}_2 \overline{\omega}^2\left[L_{12}{}^2 \overline{\omega}^2+R_2\left(R_1+\frac{L_1}{R_i C_1}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{R_1}{R_i}}\right)\right] \\ &(1-L_1 C_1 \overline{\omega}^2) R_2 \overline{C}_2+(1-L_2 \overline{C}_2 \overline{\omega}^2)\left(R_1 C_1+\frac{L_1}{R_i}\right)+\frac{\overline{C}_2}{R_i} L_{12}{}^2 \overline{\omega}^2 = L_{12} S. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Da wird man ohne weiteres erkennen, daß der auf der rechten Seite der ersten Gleichung hinzugetretene Faktor $1 : \left(1 + \frac{R_1}{R_i}\right)$ vernachlässigt werden kann. Indem wir $\overline{C}_2$ und S als veränderlich ansehen, führen wir durch Substitutionen neue Variabeln ein.

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} c \qquad \omega^2 = \frac{p}{L_1 C_1} \qquad S = \frac{L_2}{L_{12} R_2} \cdot s \tag{4}$$

und die Parameter

$$\frac{R_1 R_2 C_1}{L_2} = n_{12} \qquad \frac{R_2^2 L_1 C_1}{L_2^2} = n_2 \qquad \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} = m \qquad \frac{R_2 L_1}{R_i L_2} = q, \tag{5}$$

welche physikalisch leicht zu deuten sind und alle in derselben Größenordnung liegen. Die erste Gleichung geht über in

$$(1 - p)\left(\frac{1}{c} - p\right) = p\,(n_{12} + q + m\,p) \tag{6}$$

und wird als Frequenzkurve bezeichnet. Die zweite Gleichung in (3) ist mit $\frac{R_2}{L_2}$ zu multiplizieren, und man erhält

$$s = c\left[(1 - p)\,n_2 + \left(\frac{1}{c} - p\right)(n_{12} + q) + p\,q\,m\right]. \tag{7}$$

Dieselbe sei Rückkopplungskurve genannt.

Die Diskussion der Kurven ist einfach. Die Frequenzgleichung liefert stets zwei Werte, und zwar ist für den einen

$$(1 - p) \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{1}{c} - p\right)$$

stets positiv, für den anderen stets negativ. In der Rückkopplungsgleichung ist der Summand $p\,q\,m$ von untergeordnetem Einfluß, und so folgt, daß s für die erste Frequenz positiv, für die zweite negativ ausfällt und daß je nach Wahl des Vorzeichens von L_{12} nur die eine oder andere Frequenz entstehen kann. Eine Ergänzung zu dieser Tatsache, daß nur eine Frequenz vorhanden sein kann, stellt die aus (1) zu entnehmende Beziehung

$$2\,(d_1 + d_2) = \frac{\frac{R_1}{L_1} + \frac{R_2}{L_2}}{1 - m} + \frac{1}{C_1 R_i} \tag{8}$$

dar, denn indem die Dämpfung einer der beiden resultierenden Schwingungen zu Null wird, muß die der anderen um so positiver ausfallen.

Bei Resonanz der Kreise ($c = 1$) liefert die Frequenzkurve die Näherungswerte

$$p = 1 \pm \sqrt{m + n_{12} + q} \tag{9}$$

Die beiden Kurvenzweige zeigen naturgemäß den gleichen Verlauf wie in der Theorie der freien Schwingungen, nur daß das Produkt der Dämpfungen der beiden Kreise für den numerischen Verlauf der Kurven bestimmender sein kann als die Kopplung. Betrachten wir die tiefere Frequenz, so wird dieselbe sich um so mehr der Eigenschwingung des Primärsystems im Anodenkreis $p = 1$ annähern, je mehr $c < 1$ ist. Ist hingegen $c > 1$, so wird die Frequenz sich immer mehr $p = \frac{1}{c}$ annähern, also der veränderlichen Eigenschwingung des Gitterkreises. Aus dieser Bemerkung folgt,



daß die Rückkopplungskurve in (7) ein Minimum aufweist, denn im ersten Falle $c < 1$ wird

$$(1-p)\,n_2 \text{ klein und } \left(\frac{1}{c}-p\right)(n_{12}+q) \text{ groß}$$

ausfallen, im zweiten Falle $c > 1$ tritt das Umgekehrte ein, während diese Ausdrücke in der Nähe der Resonanz von gleicher Größenordnung sind. Aber das Minimum braucht nicht notwendig bei Resonanz zu liegen, sondern kann je nach der Dämpfung der verwendeten Kreise nach der einen oder der anderen Seite abweichen. Vermehren wir etwa die Dämpfung im Anodenkreise (wachsendes n_{12}), so rückt die Rückkopplungskurve nicht nur in die Höhe, sondern das Minimum wandert auch nach rechts zu größeren Werten von c (vgl. Bild 2). Die Berechnung solcher Kurven gestaltet sich sehr einfach. Man schreibt (6) in der Form

$$\frac{1}{c}-p=\frac{p}{1-p}(n_{12}+q+m\,p)$$

und erteilt der Größe p geeignete Werte. Bild 2a stellt die Frequenzkurve, 2b die Rückkopplungskurve dar für die Werte

$$n_{12}=4\cdot10^{-4},\qquad n_2=10^{-4},\qquad m=2\cdot10^{-4},\qquad q=2\cdot10^{-4}.$$

Für die gestrichene Kurve hat L_{12} das entgegengesetzte Vorzeichen. Der Steilheit S, welche die Charakteristiken des Rohres liefern, entspricht ein bestimmter aus (4) zu

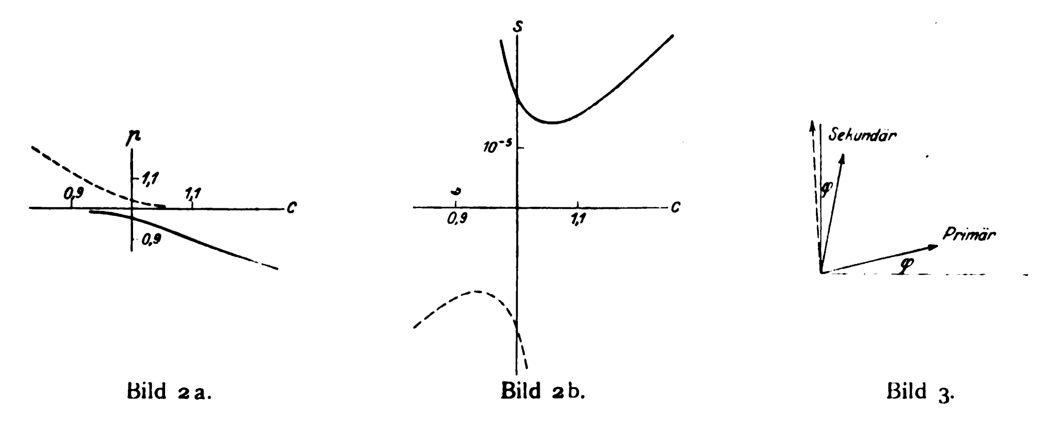


Bild 2a. Bild 2b. Bild 3.

berechnender s-Wert. Wird dieser von der Rückkopplungskurve unterschritten, so tritt in diesem Bereich Schwingungserzeugung ein. Gelangt die Kurve jedoch nicht unter diesen Wert hinab, so findet nur Dämpfungsreduktion statt, die im Minimum ihren größten Wert erreicht. Die Energieverhältnisse bei Schwingungserzeugung behandeln wir im folgenden Artikel.

Rogowski beschränkt sich in seiner Arbeit über sekundäre Rückkopplung auf den Fall vorherrschender Kopplung zwischen den Kreisen, und es kann daher in der Frequenzgleichung in (2) das Glied $R_2\left(R_1+\frac{L_1}{R_i C_1}\right)$ gegen $L_{12}^2\,\omega^2$ vernachlässigt werden. Die vorliegende Untersuchung ist allgemein gehalten, der Fall loser Kopplung in den Vordergrund gerückt. In der von Rogowski behandelten Schaltung wird dem Gitter die Spannung durch eine besondere Spule, welche mit der Spule des Sekundärkreises gekoppelt ist, zugeführt. Das die sekundäre Rückkopplung darstellende Zusatzglied enthält x in der dritten Potenz, im vorliegenden Fall in der ersten Potenz.

Allen Schaltungen, die wir entwickeln werden, ist gemeinsam, daß Spulen nur zur Bildung von Schwingungskreisen verwendet werden.



3. Sekundäre Rückkopplung bei elektrischer Kopplung der Kreise.

Für $L_{12} = 0$ kann die Gleichung (4) von Art. 1 geschrieben werden.

$$\left[\frac{1}{L_1 x + R_1} + C_1' x + \frac{1}{R_i}\right]\left[\frac{1}{L_2 x + R_2} + C_2' x\right] = C_{12} x (C_{12} x - S) \tag{1}$$

ferner

$$\left[\frac{R_1 - j L_1 \omega}{R_1^2 + (L_1 \omega)^2} + j C_1' \omega + \frac{1}{R_i}\right]\left[\frac{R_2 - j L_2 \omega}{R_2^2 + (L_2 \omega)^2} + j C_2' \omega\right] + (C_{12} \omega)^2 + j S C_{12} \omega = 0. \tag{2}$$

Die entstandenen Brüche können reduziert werden, indem R_1^2 gegen $(L_1 \omega)^2$ und R_2^2 gegen $(L_2 \omega)^2$ im Nenner vernachlässigt wird. Führt man die Substitutionen von (4) und (5) des vorigen Artikels aus und setzt entsprechend

$$S = \frac{C_1}{C_{12} R_2} s \qquad m_e = \left(\frac{C_{12}}{C_1'}\right)^2 \cdot \frac{L_2}{L_1}, \tag{3}$$

so erhält man die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p(1-p)(1-cp) &= m_e p^3 + q p + n_{12} \\ s p^2 &= n_2 (1-p) + (n_{12} + q p)(1 - c p) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Frequenzgleichung ist vom dritten Grade in p. Schreiben wir sie in der Form

$$(1-p)\left(\frac{1}{c} - p\right) = \frac{1}{c}\left(m_e p^2 + q + \frac{n_{12}}{p}\right),$$

so erkennt man, daß der Verlauf der Kurven in der Nähe von $c = 1$ und $p = 1$ derselbe ist wie in Bild 2.

Setzt man in Gleichung (1) statt der einzelnen Faktoren die reziproken Werte, so läßt sie sich folgendermaßen deuten. Der zweite Faktor der linken Seite stellt den Widerstand dar, den der Kreis (L_2, R_2, C_2') dem ihm zugeführten Strom entgegensetzt. Desgleichen bedeutet der erste Faktor den Systemwiderstand, den der Kreis (L_1, R_1, C_1') und der ihm parallel liegende innere Widerstand der Röhre bildet. Die Summe der Winkel dieser beiden Operatoren ergeben einen Winkel, der etwas größer ist als ein Rechter, da in dem Ausdruck

$$\frac{1}{j C_{12} \omega} \cdot \frac{1}{-S + j C_{12} \omega} = \frac{1}{C_{12} \omega} \cdot \frac{-C_{12} \omega + j S}{S^2 + (C_{12} \omega)^2} \tag{6}$$

$C_{12} \omega$ im allgemeinen klein gegen S sein wird. In Bild 3 ist angenommen, daß der Winkel für den Anodenkreis klein ist, dieser also nahezu in seiner Eigenschwingung erregt wird. Dies trifft bei wachsender Gitterkreiskapazität nur bis zur Resonanz der Kreise zu (Bild 2), und auch nur dann ist der Röhre bei hinreichenden Rückkopplungsgraden und richtiger Dimensionierung des Anodenkreises die größte Leistung zu entziehen. Überschreiten wir die Resonanz, so kommt die Frequenz immer mehr in die veränderliche Eigenschwingung des Gitterkreises zu liegen, indem diese die Frequenz vor sich her treibt. Die Operatoren von Bild 3 sind dann zu vertauschen. Dicht hinter dem Minimum der Rückkopplungskurve (Bild 2) wird der Gitterkreis maximal erregt, während im Anodenkreis der Strom bereits im Fallen begriffen ist.

Bei Reduktion des Kopplungskondensators C_{12} auf den Gitter-Anodekondensator und seinen Zuführungen wird es zwar noch immer möglich sein, Wellen von einigen tausend Metern zu erzeugen, aber man befindet sich dann im Minimum der Rückkopplungskurve, und es ist nicht möglich, die Röhre auf Leistung zu bringen. Das Mittel, den Resonanzwiderstand des Gitterkreises heraufzusetzen, muß auch einmal versagen, indem das nicht berücksichtigte Leitungsvermögen zwischen Gitter und Kathode diesem Verfahren eine Grenze setzt. Bei negativer Vorspannung werden diese Verluste sehr klein, und es ist möglich, den Resonanzwiderstand des Gitterkreises sehr hoch zu treiben. Auf diesen aus der Verstärkertheorie her bekannten Fall kommen wir im Art. 5 zurück.



4. Allgemeine Lösung der Aufgabe.

Bisher wurde R_i als Konstante angesehen. Wird $\frac{1}{R_i}$ proportional S gesetzt, so kommt dies überein mit der Einführung des Durchgriffs $D = \frac{1}{R_i S}$. Bei negativer Vorspannung oder kapazitiver Abriegelung des Gitters wird hiermit eine bessere Anpassung an die physikalischen Verhältnisse erreicht.

Um die allgemeine Aufgabe zu lösen, denke man sich das Polynom vierten Grades von x in Art. 1 (4) nach Potenzen von x geordnet

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \varepsilon = 0 \qquad (1)$$

und Reelles und Imaginäres getrennt, so erhält man die Gleichungen in ω^2

$$\beta \omega^2 - \delta = 0 \qquad \alpha \omega^4 - \gamma \omega^2 + \varepsilon = 0. \qquad (2)$$

Eine einfache Durchführung der Rechnung erhält man, wenn der Kondensator C_1' des Primärkreises geändert wird, und zwar deswegen, weil C_1', $\frac{1}{R_i}$, S nur in der ersten Zeile der Determinante von Art. 1, (3) auftreten. Somit stellen die Koeffizienten α, β, γ, δ, ε lineare Funktionen von C_1', $\frac{1}{R_i}$, S dar. Indem D S für $\frac{1}{R_i}$ gesetzt wird, kann man C_1' und S aus den beiden Gleichungen in (2) als rationale Funktionen in ω^2 bestimmen, und zwar sind diese vom dritten Grade. Denn die erste der beiden Gleichungen enthält ω^2 bis zur ersten Potenz, die zweite bis zur zweiten Potenz.

Es entsprechen also jedem Wert von C_1' drei Werte von ω^2. Das Vorhandensein von drei Frequenzen läuft jedoch der physikalischen Anschauung, daß in zwei gekoppelten Kreisen nur zwei Schwingungen möglich sind, zuwider. Man könnte zu dem vorschnellen Urteil gelangen, daß wir uns überflüssigen Komplikationen unterziehen. Indessen sei zum Verständnis des Folgenden gesagt, daß aus dieser Quelle alle diejenigen Eigentümlichkeiten rückgekoppelter Schwingungen folgen, die aus der Theorie der freien Schwingungen nicht zu erkennen sind, daß wir also den kubischen Charakter des Problems nicht entbehren können.

Für die folgenden Rechnungen werden die Variabeln eingeführt

$$c = \frac{C_1' L_1}{C_2' L_2} \qquad p = \omega^2 L_2 C_2' \qquad q = \frac{R_2 L_1}{R_i L_2} \qquad (3)$$

und die Konstanten

$$\left.\begin{array}{llll} \frac{R_1^2 C_2' L_2}{L_1^2} = n_1 & & \frac{R_2 R_1 C_2'}{L_1} = n_{12} & \frac{R_2^2 C_2'}{L_2} = n_2 \\ \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} = m & \left(\frac{C_{12}}{C_2'}\right)^2 \frac{L_1}{L_2} = m_e & \frac{L_{12}}{L_1} \frac{1}{D} = \eta_m & \frac{C_{12}}{C_2'} \frac{1}{D} = \eta_e \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Es bestehen die Relationen

$$\left.\begin{array}{l} n_1 : n_{12} = n_{12} : n_2 \\ \eta_m : \eta_e = \sqrt{m} : \sqrt{m_e} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Die Größe

$$S = q \frac{L_2 \eta_m}{L_{12} R_2}$$

ist der Variabel q proportional, und diese Variabel liefert ein relatives Maß für die Rückkopplung, indem mit abnehmendem q die Rückkopplung steigt und mit zunehmendem q die Rückkopplung schwächer wird, so daß die Schwingungen aussetzen, so bald der aus der Charakteristik des Rohres sich ergebende Wert für S überschritten wird. Es ist erforderlich, sich die Bedeutung jeder einzelnen Größe klar zu machen.



Das Ergebnis unserer Überlegungen ist formal wiedergegeben in

$$c = \frac{\varphi_1(p)}{\varphi_3(p)} \qquad q = \frac{\varphi_2(p)}{\varphi_3(p)}, \tag{6}$$

indem φ_1, φ_2, φ_3 Funktionen dritten Grades in p bedeuten. Die Abhängigkeit zwischen c und q, die wir wiederum als Rückkopplungskurve bezeichnen, stellt eine kubische Unikursale dar. Nach den Kegelschnitten sind diese die einfachsten, und wir überblicken sehr bald den ganzen Zusammenhang.

5. Erneute Betrachtung des Falles von Art. 3.

Die im vorigen Artikel angegebene Lösung werde für den Fall der elektrischen Kopplung vollständig durchgeführt. Die Einführung der Substitutionen in die Gleichung von Art. 3 (2) ergibt

$$\left.\begin{array}{c}\left[\left(\frac{n_{12}}{p+n_1}+q\right)-j\omega R_2 C_2'\left(\frac{1}{p+n_1}-c\right)\right]\left[\frac{1}{p+n_2}-j\omega\frac{L_2}{R_2}\left(\frac{1}{p+n_2}-1\right)\right] \\ +\left[m_e p + j\omega\frac{L_2}{R_2} q\,\eta_e\right] = 0.\end{array}\right\} \tag{1}$$

Indem man die Gleichung mit $p + n_1$ und $p + n_2$ multipliziert und statt c und q die Rechengrößen

$$n_{12} + q(p + n_1) = y \qquad 1 - c(p + n_1) = z$$

einführt, geht (1) über in

$$\left.\begin{array}{c}[y - j\omega R_2 C_2' z]\left[1 - j\omega\frac{L_2}{R_2}(1 - p - n_2)\right] \\ + m_e p(p + n_1)(p + n_2) + j\omega\frac{L_2}{R_2}\eta_e(y - n_{12})(p + n_2) = 0\end{array}\right\} \tag{2}$$

und nach Trennung von Reellem und Imaginärem

$$\left.\begin{array}{c}y - z p(1 - p - n_2) + m_e p(p + n_1)(p + n_2) = 0 \\ - y(1 - p - n_2) - z n_2 + \eta_e(y - n_{12})(p + n_2) = 0\end{array}\right\} \tag{3}$$

Die Addition liefert eine Gleichung, bei welcher $p + n_2$ als Faktor entfernt werden kann.

$$y(1 + \eta_e) + z(p - 1) - n_{12}\eta_e + m_e p(p + n_1) = 0.$$

Aus dieser und einer der beiden Gleichungen in (3) ergibt sich y und z oder c und q

$$\left.\begin{array}{c}[n_{12} + q(p + n_1)]\Delta = n_{12}\eta_e p(1 - n_2 - p) + m_e n_2 p(p + n_1) \\ [1 - c(p + n_1)]\Delta = n_{12}\eta_e + m_e p(p + n_1)[(p + n_2)(1 + \eta_e) - 1]\end{array}\right\} \tag{4}$$

$$\Delta = [p(1 + \eta_e) - 1](1 - p - n_2) - n_2. \tag{5}$$

Die Gleichungen in (4) kann man noch ein wenig umformen.

$$\left.\begin{array}{c}q(p + n_1)\Delta = n_{12}[(1 - p)^2 + n_2 p] + m_e n_2 p(p + n_1) \\ [1 - (c - m_e)(p + n_1)]\Delta = n_{12}\eta_e + m_e(p + n_1)[p(1 + \eta_e) - 1].\end{array}\right\} \tag{6}$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung in (6) ist stets positiv. Von q verlangen wir, daß es positiv ausfällt, somit muß Δ für den zunächst in Betracht kommenden Kurventeil positiv ausfallen. Der Ausdruck in (5) für Δ kann nur innerhalb

$$p < 1 - n_2 \quad \text{und} \quad > \frac{1}{1 + \eta_e} \tag{7}$$

positiv sein, indem die Grenzen selbst bereits ausgeschlossen sind, weil für sie Δ den Wert $-n_2$ annimmt. Daß die Frequenz den Wert $1 - n_2$ nicht erreichen kann, folgt bereits aus der Lage der Operatoren in Bild 3, aber es gibt auch eine untere kritische Frequenz, die niemals erreicht werden kann und die durch die Konstante η_e bestimmt ist.

Da also

$$p(\eta_e + 1) - 1 > 0$$

ist, so folgt weiter, daß die rechte Seite der zweiten Gleichung in (6) und ebenso in (4) stets positiv ist, mithin ist auch stets

$$\left.\begin{aligned} 1 - c(p + n_1) > 0 \\ c < \frac{1}{p + n_1} < \frac{1}{p} < 1 + \eta_e \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

indem aus (7) der äußerste Wert für p eingesetzt ist. Insofern als schon vor demselben Δ zu Null wird, und c wiederum weit zu negativen Werten rückt, ist die so ermittelte Grenze bereits ausgeschlossen. Man erkennt unschwer, daß die Kurve bei wachsender Primärkapazität einen Rückkehrpunkt aufweist, in welcher die Schwingung abbrechen muß, gleichgültig ob die Rückkopplung noch ausreicht (vgl. Art. 8, Bild 6). Beim Verkleinern der Kapazität C_1, findet in diesem Falle von einer bestimmten Stelle ab ein Anklingen der Schwingung statt, welches in ein plötzliches Anwachsen übergeht. Dies ist ein erstes Ergebnis unserer Maßnahme, und obwohl viele Autoren sich mit dem Gegenstand befaßt haben, ist von niemandem derartiges bemerkt worden.

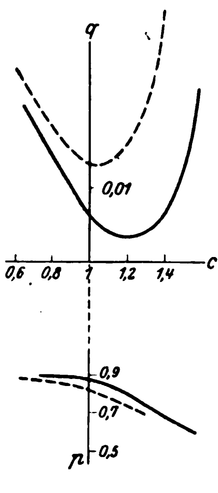


Bild 4.

Bei Ausführung des Versuchs ist es ein erstes Erfordernis, die Röhre so einzustellen, daß im allgemeinen die Amplitude mit wachsender Rückkopplung kontinuierlich wächst und umgekehrt. Ein B—E-Rohr von Siemens und Halske zeigt die Erscheinung bereits bei negativer Vorspannung des Gitters, noch besser bei kapazitiv abgeriegeltem Gitter, da mit wachsender Rückkopplung das Gitter infolge der einseitigen Leitfähigkeit der Röhre sich negativ auflädt und eine Einsattelung des Anodenstromes durch den Gitterstrom vermieden wird, so daß in guter Annäherung $\frac{1}{R_i}$ proportional S wird.

Wir betrachten noch die Verhältnisse, wie man sie bei der inneren Rückkopplung der Verstärker antrifft. Für die Kapazität eines Eingangstransformators gibt Barkhausen 80 cm an[1]). Den Gitter-Kathodekondensator setzen wir zu 10 cm an, ebenso den Gitter-Anodekondensator samt seinen Zuführungen (C_{12}). Dann wird $C_2' = 100$ cm, der Durchgriff D sei 10%, und η_e berechnet sich zu 1. Im allgemeinen wird η_e kleiner als 1 sein. Dem Dämpfungsdekrement 0,6 entspricht ein Wert $n_2 = 0{,}04$. Die Dämpfung des Anodenkreises machen wir erstens sehr klein $n_1 = 10^{-4}$ (ausgezogene Kurven), zweitens $n_1 = 0{,}0016$ (gestrichelte Kurven) Bild 4. Diesen Werten entsprechen $n_{12} = 0{,}002$ und 0,008. In beiden Fällen kann n_1 gegen p vernachlässigt werden. Die Kapazität C_1', bei welcher der Anodenkreis mit dem Gitterkreis in Resonanz kommt, sei 5000 cm, dann berechnet sich m_e zu 0,0002. Diese Größe geht in (6) nur unwesentlich ein. Bild 4 zeigt, daß mit zunehmender Dämpfung im Anodenkreis die Kurve nicht nur in die Höhe rückt, sondern das Minimum zu kleineren Kapazitätswerten wandert, in Übereinstimmung mit Artikel 2. Daselbst wurde die Gitterkreiskapazität, hier die Anodenkreiskapazität geändert.

6. Elektrische und magnetische Kopplung.

Im vorigen Artikel wurde für die elektrische Kopplung der Bereich der möglichen Frequenzen in zwei Grenzen eingeschlossen, in der Weise, daß die anstoßenden Frequenzbereiche ausgeschlossen waren. Allgemeine Betrachtungen, welche wir in Artikel 12 anstellen werden, lassen erkennen, daß auch bei Vereinigung von mag-

[1]) Jahrbuch der drahtlosen Telegraphie Band 16.

netischer und elektrischer Kopplung derartige Grenzen vorhanden sein müssen. Wir stellen uns die Aufgabe, dieselben zu bestimmen. In Art. 4 (4) wurde gefunden

$$q = \frac{\varphi_2(p)}{\varphi_3(p)} \tag{1}$$

indem φ_2 und φ_3 Funktionen dritten Grades in p sind. Die Nullstellen von φ_2 kommen nicht in Frage, denn $q = 0$ bedeutet freie Schwingungen des gekoppelten Systems, und der Fall der Selbsterregung ist ausgeschlossen.

Die nähere Untersuchung ergibt, daß φ_2 nur vom zweiten Grade in p ist und zwei konjugiert imaginäre Wurzeln besitzt [vgl. Art. 10 (6) und Anm.]. Somit kommt es auf die Nullstellen von φ_3 an, in denen q unendlich groß wird, um dann negativ zu werden. $\varphi_3(p)$ wird erhalten, wenn man in den beiden linearen Gleichungen für c und q die Determinante der Koeffizienten von c und q bildet, und es ist nur notwendig, alle Glieder in Art. 1 (4), die C_1', R_i, S enthalten, zu sammeln. Zusammenfassend finden wir

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\left(C_1' x + \frac{1}{R_i}\right)(1 + R_2 C_2' x + L_2 C_2' x^2) + S C_{12} x (L_2 x + R_2)\right](L_1 x + R_1) \\ &\qquad - S L_{12} x - L_{12}^2 x^3 \left[C_2'\left(C_1' x + \frac{1}{R_i}\right) + S C_{12}\right]. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Nimmt man L_{12} zu Null an, so kann der Faktor $L_1 x + R_1$ entfernt werden, und es ergibt sich der einfache Ausdruck für Δ in (5) des vorigen Artikels. Um diesen Ausdruck nachzubilden, kann noch durch $L_1 x$ dividiert werden. Die Einführung der Substitutionen von Art. 4 (3) und (4) und die Trennung von Reellem und Imaginärem ergibt die gesuchten linearen Formen in c und q [vgl. die Formeln für α, β, γ, δ, ε von Art. 9 (2) und (7)].

$$\left.\begin{aligned} &c\,[n_{12} - p(n_{12} + n_2)] + q(1 + \eta_e)[1 + n_{12} - p(1 - m)] - q(\eta_e + \eta_m) \\ &c\,[1 + n_{12} - p(1 - m)] + q(1 + \eta_e)\left(1 + \frac{n_{12}}{n_2}\right) - q\,\frac{n_{12}}{p\,n_2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

deren Determinante sich berechnet zu

$$\left.\begin{aligned} &-[1 + n_{12} - p(1 - m)]^2 (1 + \eta_e) + [1 + n_{12} - p(1 - m)](\eta_e + \eta_m) \\ &\qquad -[p(n_{12} + n_2) - n_{12}]\left[(1 + \eta_e)\left(1 + \frac{n_{12}}{n_2}\right) - \frac{n_{12}}{p\,n_2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Dieselbe kann reduziert werden auf

$$\Delta' = [p(1 - m) - 1][(1 - \eta_m) - p(1 - m)(1 + \eta_e)] - (1 + \eta_e)\,p\,(n_2 - 2 m n_{12}) + n_{12}\eta_m + \frac{n_1}{p}\,\Delta, \tag{5}$$

indem Δ der Ausdruck von Art. 5 (5) bedeutet. Die drei letzten Summanden sind von untergeordnetem Einfluß, und es folgt, daß nur die Frequenzen innerhalb der Grenzen

$$p = \frac{1}{1 - m} \quad \text{und} \quad \frac{1 - \eta_m}{(1 - m)(1 + \eta_e)} \tag{6}$$

möglich sind. Für $\eta_m = -\eta_e$ fallen die beiden Grenzen zusammen, und diese Bedingung stimmt zufolge der Werte von η_m und η_e in Art. 4 (4) mit der in Art. 1 (6) angegebenen Bedingung der Entkopplung überein. Daß in diesem Falle Δ' für alle Frequenzen negativ ausfällt, ist leicht zu sehen, denn von den letzten drei Summanden ist $-(1 + \eta_e)\,p\,(n_2 + 2 m n_{12})$ und $n_{12}\eta_m$ negativ, in dem letzten Glied $\frac{n_1}{p}\,\Delta$ ist Δ für die fragliche Frequenz $p = \frac{1}{1 - m}$ ebenfalls negativ. Hat man durch magnetische Kopplung von negativem L_{12} die höhere Frequenz hergestellt, so wird bei allmählicher Steigerung der elektrischen Kopplung C_{12} diese Schwingung ver-

schwinden, wir treten in einen Bereich ein, in welchem ihre Dämpfung noch reduziert erscheint, sodann folgt ein Bereich totaler Entkopplung, bei weiterer Steigerung der elektrischen Kopplung wird die Dämpfung der anderen möglichen Schwingung vermindert, und diese tritt schließlich auf.

Hiermit sind die wesentlichsten Eigenschaften der Schaltung in Bild 1 angegeben, und es könnte die Ausbeute gegenüber dem Aufwand als gering erachtet werden. Schon aus diesen Gründen müssen wir uns nach andern Hilfsmitteln umsehen, um die vorgenommenen Entwicklungen ihrer Bedeutung entsprechend in ein helleres Licht zu setzen.

7. Ausdehnung der Untersuchung auf eine Zweiröhren-Anordnung.

In der untersuchten Schaltung konnte bei magnetischer Kopplung je nach Wahl des Vorzeichens von L_{12} entweder die eine oder die andere Kopplungsschwingung erzeugt werden. Die elektrische Kopplung ist hingegen nicht umkehrbar, und nur die tiefere Frequenz kann durch eine solche Kopplung hergestellt werden. Gelingt es die dem Sekundärkreis abzunehmende Spannung in der Phase umzukehren, bevor sie dem Gitter zugeführt wird, so entsteht die höhere Frequenz.

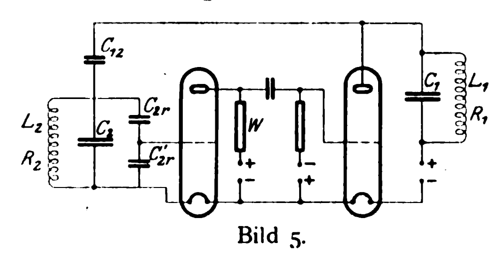


Bild 5.

Eine solche Anordnung wurde bereits in der Abhandlung von G. Leithäuser und mir „Über Schwingungserzeugung mittels zweier Röhren", Jahrbuch Bd. 17, Heft 1 beschrieben. Die zur Rückkopplung dienende Spannung wird dem Gitter eines Vorrohres zugeführt, in dessen Anodenleitung ein (induktions- und kapazitätsfreier) Widerstand W geschaltet ist. Die Spannungsänderungen der Anode werden dann über eine Kapazität dem Gitter des Hauptrohres zugeführt (Bild 5). Der Sekundärkapazität C_2 ist noch ein Kapazitätskanal C_{2r}, C_{2r}' parallel gelegt, einerseits zur Regulierung der Rückkopplung, andererseits zur Abriegelung des Gitters der Vorröhre. Für C_2 ist genau genommen zu setzen

$$C_2 + \frac{C_{2r} C_{2r}'}{C_{2r} + C_{2r}'}, \tag{1}$$

aber es kann C_{2r} klein gehalten werden gegen C_2. Die Spannung e_g', die dem Gitter des Hauptrohres erteilt wird, kann ausgedrückt werden durch die Spannung e_g, die am Sekundärkreise auftritt. Bedeuten D' und R_i' Durchgriff und innerer Widerstand der Vorröhre, so findet man

$$e_g' = - e_g \frac{C_{2r}}{C_{2r} + C_{2r}'} \cdot \frac{1}{D'} \frac{W}{W + R_i'}. \tag{2}$$

Wird dieser Ausdruck in den linearen Ansatz von Art. 1 (1) eingesetzt, so bleibt er formal ungeändert, wenn an die Stelle von S ein anderer Ausdruck tritt.

$$S' = - S \frac{C_{2r}}{C_{2r} + C_{2r}'} \cdot \frac{1}{D'} \cdot \frac{W}{W + R_i'}. \tag{3}$$

Die Entwicklungen von Art. 1—6 finden daher auch auf diese Anordnung Anwendung, sobald der Größe S negative Werte erteilt werden. Hierzu ist noch folgendes zu bemerken. Macht man C_{2r}' zu Null, so wird der zweite Faktor in (3) gleich 1, und die Kapazität C_{2r} dient nur noch zur Abriegelung. Für diesen Fall



darf C_{2r} nicht zu klein gewählt werden, andernfalls eine merkliche primäre Rückkopplung zu der sekundären hinzutritt (vgl. Art. 11, Bild 9). Die Größe D' kann als Konstante angenommen werden. Ist die Charakteristik des Vorrohres teilweise gradlinig, und wird die Anodenspannung so gewählt, daß dasselbe auf dem gradlinigen Teil der Charakteristik arbeitet, so ist auch der innere Widerstand R_i' des Vorrohres konstant, sobald man den Widerstand W so wählt, daß eine Verstärkung vorhanden ist und die dem Gitter des Vorrohres zugeführten Spannungen klein sind gegenüber den am Hauptrohr auftretenden Spannungen. Unter dieser Voraussetzung kann S' ebenso wie S proportional $\frac{1}{R_i}$ angenommen werden. Entsprechend den in Art. 4 (4) eingeführten Konstanten setzen wir

$$\eta_e' = \frac{C_{12}}{C_2'} S' R_i = -\frac{C_{12}}{C_2'} \frac{C_{2r}}{C_{2r} + C_{2r}'} \cdot \frac{1}{D D'} \cdot \frac{W}{W + R_i'} \tag{4}$$

und es ist η_e' stets negativ. An die Stelle von η_m tritt eine ähnliche Größe. Arbeitet das Vorrohr über den gradlinigen Teil der Charakteristik hinaus, oder ist im besonderen die Anodenspannung so klein, daß das Rohr in der unteren Krümmung der Charakteristik arbeitet, so nimmt mit wachsender Rückkopplung R_i' zu und somit $|\eta_e'|$ ab.

8. Anwendung der Ergebnisse von Art. 5 auf das Zweiröhrensystem.

Zufolge der Erörterungen des vorigen Artikels gelten die entwickelten Gleichungen für die Schaltung in Bild 5, sobald unter S eine negative Größe verstanden wird. Ist nur elektrische Kopplung zwischen den Kreisen vorhanden, so ist nach Art. 3 (1) die Schwingungsgleichung gegeben durch

$$\left[\frac{1}{L_1 x + R_1} + C_1' x + \frac{1}{R_i}\right]\left[\frac{1}{L_2 x + R_2} + C_2' x\right] = C_{12} x (C_{12} x - S'). \tag{1}$$

Man kann sowohl den Widerstand des Induktivitätszweiges im Primärkreise wie den im Sekundärkreise unendlich groß werden lassen und gelangt in beiden Fällen zu einer schwingungserzeugenden Schaltung. Diese Spezialfälle bilden den Ausgangspunkt der am Anfang des vorigen Artikels genannten Abhandlung. Um dies näher auszuführen, machen wir erstens

$$L_2 x + R_2 = \infty \tag{2}$$

und die Gleichung (1) reduziert sich auf

$$\frac{1}{L_1 x + R_1} + C_1'\left(1 - \frac{C_{12}^2}{C_1' C_2'}\right) x = -\frac{C_{12}}{C_2'} S' - \frac{1}{R_i} = -\frac{1}{R_i}(\eta_e' + 1). \tag{3}$$

Der linksstehende Ausdruck stellt das Leitungsvermögen des Kreises

$$\left(L_1, R_1, C_1'\left(1 - \frac{C_{12}^2}{C_1' C_2'}\right)\right)$$

dar. Den rechtsstehenden Ausdruck

$$\frac{1}{R_i}(\eta_e' + 1) \tag{4}$$

könnte man zu einer neuen Größe zusammenfassen. Die Möglichkeit der Schwingungserzeugung besteht nur, wenn dieselbe negativ ist, mithin $-\eta_e' > 1$ gemacht wird. Diese Schaltungsweise gibt ein Mittel an die Hand, auch die Größe R_i durch eine negative Größe zu ersetzen. Wie dies für gekoppelte Kreise in allgemeinster Weise ausgeführt werden kann, soll in Art. 11 gezeigt werden. Zweitens setzen wir

$$L_1 x + R_1 = \infty \tag{5}$$

und erhalten



$$\left[\frac{1}{L_2 x + R_2} + C_2' x\right] = \frac{C_{12} x (C_{12} x - S')}{C_1' x + \frac{1}{R_i}}. \tag{6}$$

Indem $C_2 + C_{12}$ für C_2' gesetzt wird, gelangt man zu dem bereits angegebenen Resultat:

$$\frac{1}{L_2 x + R_2} + C_2 x = \frac{-C_{12} x \left(S' + \frac{1}{R_i} + C_1 x\right)}{C_1' x + \frac{1}{R_i}}. \tag{7}$$

Für die allgemeine Schaltung fanden wir zufolge Art. 5 (7), daß p nur Werte innerhalb der Grenzen

$$1 - n_2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{1 + \eta_e'} \tag{8}$$

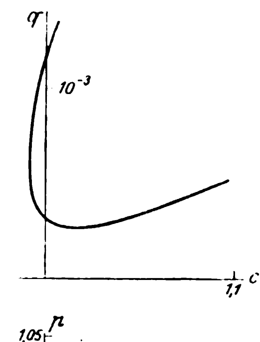
annehmen kann. Sobald aber $-\eta_e' > 1$ wird, existiert für die Frequenz keine obere Grenze mehr. Dies Ergebnis ist unmittelbar einzusehen, denn wenn die Primärkapazität C_1 immer kleiner wird, nimmt die Frequenz immer mehr die Eigenschwingung dieses Kreises an, so daß wir uns dem in (2) aufgeführten Spezialfall annähern.

Nehmen wir $-\eta_e' < 1$ an, so sind beide Grenzen vorhanden. Schreiben wir den Ausdruck für Δ in Art. 5 (5) in der Form

$$\Delta = (p - 1)[1 - (p + n_2)(1 + \eta_e')] - n_2 (1 + \eta_e'),$$

so wird Δ nur positiv, wenn

$$1 < p < \frac{1}{1 + \eta_e'} - n_2. \tag{10}$$



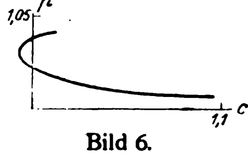


Bild 6.

Es ist also

$$-1 < \eta_e' < 0 \qquad p(1 + \eta_e') - 1 < -n_2 (1 + \eta_e') < 0, \tag{11}$$

mithin ist die rechte Seite der zweiten Gleichung von Art. 5 (6) stets negativ und es folgt, daß

$$1 - (c - m_e)(p + n_1) < 0 \tag{12}$$

oder

$$c - m_e > \frac{1}{p + n_1} > \frac{1 + \eta_e'}{1 + (n_1 - n_2)(1 + \eta_e')} \sim 1 + \eta_e'. \tag{13}$$

Die Kurve hat abermals einen Rückkehrpunkt und man gelangt zu demselben bei abnehmender Primärkapazität. Bild 6 zeigt den Verlauf für die Werte

$$m = 2 \cdot 10^{-5} \qquad n_1 = n_2 = 2 \cdot 10^{-4} \qquad \eta_e' = -0{,}05.$$

9. Elektrische und magnetische Kopplung.

Es werde in Bild 5 außer der elektrischen Kopplung noch magnetische Kopplung unter den Spulen der beiden Kreise angenommen.

Für den Fall, daß $-\eta_e' < 1$, $\eta_m' < 1$ und $-\eta_e'$ und η_m' merklich voneinander verschieden sind, werden die in Art. 6 (6) angegebenen Frequenzgrenzen in Geltung bleiben.

Nehmen wir zweitens $-\eta_e' > 1$, $\eta_m' > 1$ aber wiederum merklich voneinander verschieden an, so wird der Ausdruck für Δ' in Art. 6 (5) im Gegensatz zu dem ersten Fall innerhalb der angegebenen Grenzen negativ sein, außerhalb derselben positiv sein. Wir erhalten zwei Streifen möglicher Frequenzen, und es ist zu vermuten, daß die beiden möglichen Schwingungen rückgekoppelt sind.

Ob sich bei einer Annäherung von η_m' an $-\eta_e'$ der für den ersten Fall konstatierte Bereich möglicher Frequenzen vollständig zusammenzieht, hängt von den drei Summanden ab, welche in dem Ausdruck für Δ' auf die beiden Faktoren folgen. Für den zweiten Fall ist ohnehin zu erkennen, daß die beiden getrennten Frequenzstreifen in ein kontinuierliches Frequenzband zusammenwachsen, denn es ist $-(1 + \eta_e')\, p\, (n_2 + 2\, m\, n_{12})$ und $n_{12}\, \eta_m'$ positiv, $\frac{n_1}{p} \Delta$ bleibt im Vorzeichen unbestimmt, ist aber für die fragliche Frequenz $p = \frac{1}{1 - m}$ von kleinerer Größenordnung.

Zur Klarlegung der Verhältnisse ist es notwendig, einige einfache Entwicklungen den bisherigen hinzuzufügen.

Um festzustellen, ob beide Schwingungen zugleich rückgekoppelt sind, ist es ausreichend den Doppelpunkt der kubischen Unikursale zu bestimmen, in welchem beide Schwingungen die gleiche Rückkopplung aufweisen. Es werden nämlich die Dämpfungen beider Schwingungen zugleich Null, wenn in dem Polynom vierten Grades von Art. 4 (1) die Koeffizienten β und δ zugleich Null werden. Für diese Koeffizienten findet man aus Art. 1 (4)

$$\left.\begin{aligned} \beta &= (C_1' C_2' - C_{12}^2)(L_1 R_2 + R_1 L_2) + (L_1 L_2 - L_{12}^2)\left(\frac{C_2'}{R_i} + C_{12} S'\right) \\ \delta &= R_1 C_1' + R_2 C_2' + \frac{L_1}{R_i} \cdot L_{12} S' + R_1 R_2 \left(\frac{C_2'}{R_i} + C_{12} S'\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nach Einführung der Substitutionen von Art. 4 erhält man zwei lineare Gleichungen für die Koordinaten c und q des Doppelpunktes

$$\left.\begin{aligned} (c - m_e)(n_{12} + n_2) + q\,(1 - m)(1 + \eta_e') &= 0 \\ n_{12}\, c + n_2 + q\,(1 - \eta_m') + [q\, n_{12}\, (1 + \eta_e')] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

In der zweiten Gleichung kann die letzte Klammer vernachlässigt werden. Schreibt man die Gleichung noch in der Form

$$(c - m_e)\, n_{12} + q\,(1 - \eta_m') + n_2 + m_e\, n_{12} = 0, \quad (3)$$

so ergibt sich

$$c - m_e = -q\, \frac{(1 + \eta_e')(1 - m)}{n_{12} + n_2} = -\frac{n_2 + m_e\, n_{12}}{n_{12} + \frac{(\eta_m' - 1)(n_{12} + n_2)}{(1 + \eta_e')(1 - m)}}. \quad (4)$$

$$q = \frac{(n_{12} + n_2)(n_2 + m_e\, n_{12})}{n_{12}\,(1 + \eta_e')(1 - m) + (\eta_m' - 1)(n_{12} + n_2)}. \quad (5)$$

Aus (4) folgt, daß c und q nur dann positiv ausfallen, wenn $-\eta\,' > 1$ ist, und aus dem Nenner in (5) folgt weiter, daß auch $\eta_m' > 1$ sein muß. Ist η_m' von $-\eta_e'$ merklich verschieden, so durchschneidet die Kurve sich auch im Doppelpunkt, wie aus dem Vorhandensein der beiden getrennten Frequenzstreifen zu schließen ist. Die Lage dieses Doppelpunktes wird sogleich erkannt, wenn zunächst $-\eta_e' = \eta_m' = \eta'$ angenommen wird. Dann wird auch $m = m_e$, und die allgemeinen Formeln in (4) und (5) ergeben.

$$c = 1 \qquad q = \frac{n_{12} + n_2}{\eta' - 1}. \quad (6)$$

Es folgt nunmehr aus (4), daß bei überwiegender magnetischer Kopplung $c < 1$ wird, das Primärsystem also höher gestimmt sein muß als das sekundäre. Ebenso folgt, daß bei überwiegender elektrischer Kopplung das Primärsystem tiefer gestimmt werden muß, damit das Auswechseln der beiden Schwingungen erfolgt.



Um näheres über den Fall $-\eta_e' = \eta_m'$ auszusagen, ist es notwendig, das vollständige Gleichungssystem aufzustellen. Dazu notieren wir die in (1) noch fehlenden Koeffizienten α, γ, ε der zweiten Gleichung von Art. 4 (2)

$$\left.\begin{aligned}
\alpha&: (L_2 C_2)^2 = (1 - m)(c - m_e) \\
\gamma&: (L_2 C_2) \;= 1 + c + (c - m_e) n_{12} + q(1 + \eta_e')\left(1 + \frac{n_{12}}{n_2}\right) + 2\sqrt{m\, m_e} \\
\varepsilon&: \qquad\quad = 1 + q\frac{n_{12}}{n_2}
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

setzen ferner

$$-\eta_e' = \eta_m' = \eta' \qquad m_e = m \qquad \sqrt{m\, m_e} = -m$$

und erhalten das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
q(\eta' - 1) &= \frac{[p(c - m) - 1](n_{12} + n_2) + (1 - c)\, n_{12}}{p(1 - m) - 1} \\
&= \frac{n_{12} - [p(c - m) - 1][p(1 - m) - 1 - n_{12}]}{p\left(1 + \frac{n_{12}}{n_2}\right) + \frac{n_{12}}{n_2(\eta' - 1)}}
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$c = 1$ liefert den in (6) aufgeführten Doppelpunkt. Es muß jedoch noch eine dritte Lösung existieren. Für die Werte $c = 1$ $p = \frac{1}{1 - m}$ verschwindet Zähler und Nenner des ersten Bruches in (8). Diese Werte, in den zweiten Bruch eingeführt, ergeben den zugehörigen Wert von q, und die dritte Lösung berechnet sich zu

$$c = 1 \qquad p = \frac{1}{1 - m} \qquad q = \frac{n_{12}(1 - m)}{(\eta' - 1) + \frac{n_{12}}{n_2}(\eta' - m)}. \tag{9}$$

In der Tat kommt nur diese Lösung in Frage. Denn der Doppelpunkt in (6) erhält nur für $\eta' > 1$ ein positives q, und der in (9) berechnete Wert für q ist in diesem Falle stets kleiner als der in (6). Der Doppelpunkt ist somit ein isolierter, indem die Kurve unterhalb desselben verläuft.

Aber auch die Lösung in (9) kann fortfallen, denn bei abnehmendem η' wächst q und wird für

$$\eta' < \frac{1 + \frac{n_{12}}{n_2} m}{1 + \frac{n_{12}}{n_2}} \tag{10}$$

negativ, so daß überhaupt keine schwingungsfördernde Rückkopplung vorhanden ist.

Bei diesen Resultaten ist sehr wohl zu beachten, daß die Ableitung des Sekundärkreises einen erheblichen Einfluß gewinnen kann, worauf bereits in Art. 1 (6) hingewiesen wurde. Nimmt man an, daß zugleich

$$C_{12} L_1 + C_2' L_{12} = 0 \qquad R_1 C_{12} + G_2 L_{12} = 0,$$

so wird der Strom in der Sekundärspule zwar zu Null; man kann die Spule öffnen oder ganz herausnehmen, aber die Schaltung kann zufolge Art. 8 (3) für $-\eta_e' > 1$ noch immer Schwingungen hervorbringen.

10. Der Fall $-\eta_e' = 1$, in welchem sich die kubische Unikursale auf einen Kegelschnitt reduziert.

Der Kurvenverlauf läßt sich in einer sehr einfachen Weise darlegen, wenn man von dem Fall $-\eta_e' = 1$ ausgeht, in welchem sich die kubische Unikursale auf einen Kegelschnitt reduziert, oder genauer gesagt, in einen Kegelschnitt und in eine gerade Linie zerfällt. Die allgemeinen Gleichungen von Art. 4, (2) gewinnen die Gestalt



$$\left.\begin{array}{l}(c - m_e)(n_{12} + n_2)\,p - (n_{12}c + n_2) - q\,(1 - \eta_m') = 0 \\ (c - m_e)(1 - m)\,p^2 - p\,[1 + c + (c - m_e)\,n_{12} - 2\,\eta_m'\,m_e] + 1 + q\,\frac{n_{12}}{n_2} = 0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Die erste Gleichung enthält p nur bis zum ersten Grade. Multipliziert man diese mit $p\,(1 - m)$, die zweite mit $(n_{12} + n_2)$, so ergibt die Subtraktion eine zweite Gleichung von der Beschaffenheit, daß sie p nur bis zum ersten Grade enthält und linear in c und q ist. Zwei solche Gleichungen liefern die Erzeugung eines Kegelschnittes durch Strahlbüschel, um eine Ausdrucksweise der synthetischen Geometrie zu gebrauchen. Die gerade Linie

$$c - m_e = 0 \qquad (2)$$

ist dem Kegelschnitt hinzuzudenken. Sie schneidet denselben in dem Doppelpunkt von Art. 9 (4) und (5).

$$c = m_e \qquad q_1 = -\frac{n_2 + m_e\,n_{12}}{1 - \eta_m'}. \qquad (3)$$

Der zweite Schnittpunkt liegt bei

$$q_2 = \frac{1}{(1 - m)(1 - \eta_m')}\,[n_{12}\,(1 - m_e\,\eta_m')^2 + n_2\,m_e\,(1 - \eta_m')^2]. \qquad (4)$$

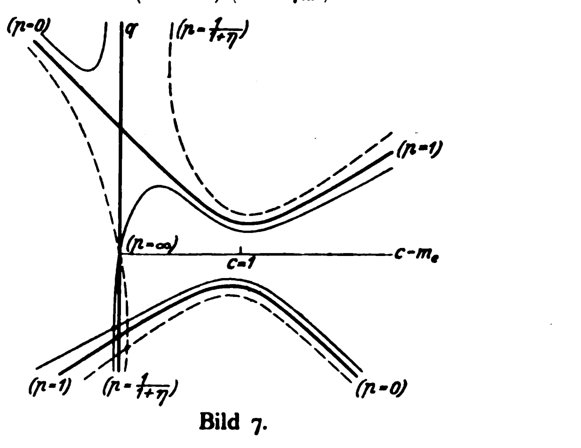


Bild 7.

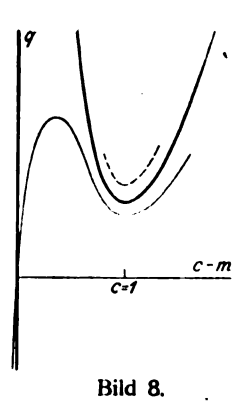


Bild 8.

Wir betrachten zunächst den Fall $\eta_m' = 0$ (und $m = 0$) näher, den wir in Art. 5 vollständig ausgerechnet haben. Der allgemeine Fall ist unter der Voraussetzung $\eta_m' < 1$ nicht wesentlich verschieden, da in (3) q_1 stets negativ und q_2 in (4) stets positiv ausfällt.

Bild 7 zeigt drei Kurven. Die stark ausgezogene Kurve stellt den Kegelschnitt dar, welcher allemal eine Hyperbel ist. Ebenfalls ist die zugehörige gerade Linie in (2) stark ausgezogen. Die benachbarte dünn ausgezogene Kurve stellt einen Wert für $-\eta_e' > 1$ dar, die gestrichelte Kurve einen Wert für $-\eta_e' < 1$. Das Verhalten der Asymptoten des Kegelschnittes bei Veränderung von η_e' geht aus den Näherungsformeln hervor:

$$\eta_e'\,q + n_2\,(c - 1) = 0 \qquad q + n_{12}\,(c + \eta_e') = 0. \qquad (5)$$

Die erste dreht sich um den Punkt $c = 1$, $q = 0$, die zweite verschiebt sich parallel zu sich selbst. Das Verhalten der dritten Asymptote der Unikursale ist durch den in Art. 8 nachgewiesenen Rückkehrpunkt gekennzeichnet. Für $-\eta_e' < 1$ läuft die Kurve zurück und nach oben, für $-\eta_e > 1$ läuft sie durch den Punkt[1])

$$p = \infty \qquad c = m_e \qquad q = 0 \qquad (6)$$

nach negativen Werten für q.

[1]) Diesen Punkt durchlaufen alle Kurven, denn aus $p = \infty$ folgt $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und daraus $c = m_e$, $q = 0$. Es sind daher in Art. 4 (6) die Funktionen φ_2 und $\varphi_1 - m_e\,\varphi_3$ vom zweiten Grade in p.



Zweitens betrachten wir den Fall $-\eta_e' = \eta_m' = \eta'$, für den wir in (8) des vorigen Artikels ein vollständiges Gleichungssystem aufgestellt haben. Setzt man $\eta' = 1$, so folgen nach einigen Umformungen die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 1 - c &= \frac{p(1-m)-1}{p - \dfrac{n_{12}}{n_{12}+n_2}} \\ q &= n_2 + \frac{n_2}{n_{12}+n_2}(1-c)\left[p(1-m)-1-n_{12}\right] \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Vernachlässigt man in der eckigen Klammer n_{12} und eliminiert p, so erhält man die Gleichung

$$t(c-1)^2 - (c-m)(q-n_2) = 0 \qquad (8)$$

indem

$$\frac{n_2(n_2 + m\,n_{12})}{(n_{12}+n_2)^2} = t \qquad (9)$$

gesetzt ist. Die Asymptoten dieser Hyperbel in (8) berechnen sich zu:

$$c - m = 0 \qquad (q-n_2) - t(c-2+m) = 0. \qquad (10)$$

Die erste Asymptote fällt mit der zugehörigen Geraden in (2) zusammen[1]), Bild 8. Die Kurve nimmt nahezu die Gestalt einer Parabel an. In der Resonanzlage ($c = 1$) hat sie ein Minimum. Dies gilt für alle Kurven sowohl bei $\eta' < 1$ als auch $\eta' > 1$. Geht man bei Veränderung der Primärkapazität durch die Abstimmung, so wird daselbst die Schwingungsamplitude ein Maximum zeigen, bei Veränderung der Sekundärkapazität hingegen ein Minimum, indem man aus der Entkopplung heraustritt.

Die untere Kurve für $\eta' > 1$ zeigt noch ein Maximum zwischen den Werten $c = m_e$ und $c = 1$. Dasselbe wird bei wachsendem η', also gleichzeitiger Steigerung von elektrischer und magnetischer Kopplung mehr in die Nähe der Resonanz gerückt. Vergrößert man darauf nur die magnetische Kopplung, so wird zufolge der Ergebnisse des vorigen Artikels (4), (5) und (6) das Maximum zu einer Spitze ausartend sich mit dem isolierten Punkt der Kurve vereinigen und hierauf die Kurve im Doppelpunkt sich selbst schneiden[2]), indem dieser nicht nur zu kleineren Werten von c, sondern auch tiefer rückt. Die gestrichelte Kurve in Bild 7, soweit sie im negativen Gebiet von q verläuft, hat eine solche Gestalt. Der innere Grund wird aus der folgenden Entwicklung klar. Bei abnehmender magnetischer Kopplung oder Steigerung der elektrischen Kopplung wird das oben erwähnte Maximum der unteren Kurve in Bild 8 über die Resonanz gedrängt. Das Maximum vereinigt sich wiederum mit dem isolierten Punkt und die Kurve schneidet im Doppelpunkt sich selbst, nur daß dieser zu größeren Werten von c und höher bis in das Unendliche rückt. Letzteres tritt ein für einen Wert $\eta_m > 1$, der aus dem Nenner von q Art. 9 (5) zu entnehmen ist. Die Kurven haben dieselbe Gestalt wie die in Bild 13, Art. 12, gezeichnete, sobald q mit $-q$ vertauscht wird, weshalb wir nicht länger dabei zu verweilen brauchen.

11. Entwicklung einer dritten Schaltungsserie.

Im folgenden handelt es sich darum, die gekoppelten Kreise an die Zweiröhrenanordnung in der Weise zu schalten, daß in den Gleichungen an Stelle von R_i eine negative Größe gesetzt werden kann. Eine solche Schaltung ergab sich für $S = 0$ bereits aus dem in Art. 8 (4) erhaltenen Spezialfall. Die allgemeine Lösung stellen Bild 10 und 11 dar. Sie können aufgefaßt werden als eine Fortbildung der Unter-

[1]) Daraus erklärt es sich, daß man bei Werten von $\eta' > 1$ eine Kurve mit isoliertem Doppelpunkt erhält, wie in (9) des vorigen Artikels angegeben wurde, während für $\eta' < 1$ die Kurve bei einem negativem Wert von q sich selbst schneidet.

[2]) Zunächst eine Schleife bildend, welche sehr bald die unendlich ferne Gerade erreicht.

suchungen, wie sie von Leithäuser und mir am Zweiröhrensystem ausgeführt wurden, weshalb im folgenden daran angeknüpft wird.

Es können die in Art. 8 (2) und (5) aufgeführten Spezialfälle $L_1 x + R_1 = \infty$ und $L_2 x + R_2 = \infty$ in der Weise vereinigt werden, daß das Röhrensystem genötigt wird, beide Funktionen zu übernehmen. Damit die Entartung $L_1 x + R_1 = \infty$ annähernd erfüllt sei, ist es notwendig, das primäre System tiefer zu stimmen als das sekundäre. Ebenso läßt sich die Entartung $L_2 x + R_2 = \infty$ annähernd erfüllen, wenn man den Rückkopplungskanal C_{1r}, C_{1r}' in Bild 9 sehr klein macht, so daß für die tiefere Frequenz der Scheinwiderstand von C_{1r}' groß wird gegen den Widerstand des Sekundärkreises. Die Rückkopplung der tieferen Frequenz, welche durch den Kreis (L_1, R_1, C_1) gegeben ist, ist regulierbar durch C_{1r}'. Zur Regulierung der Rückkopplung der höheren Frequenz im Kreise (L_2, R_2, C_2) zieht man noch einen zweiten Kanal, bestehend aus dem Kondensator C_{12} (Bild 9), welcher immer noch klein gegen C_1 ist. Eine solche Schaltungsweise stellt ein System gekoppelter Kreise dar, welches sowohl primäre wie sekundäre Rückkopplung aufweist. Es ist wünschenswert, auch die sekundäre Rückkopplung regulierbar zu machen. Zu diesem Zwecke teilt man C_2 auf in die Kondensatoren C_2 und C_{2u}, wie Bild 10 zeigt. Dann fällt C_{2u} sehr groß aus und ist nur stufenweise veränderlich. Die Schaltung hat den Vorzug, daß die

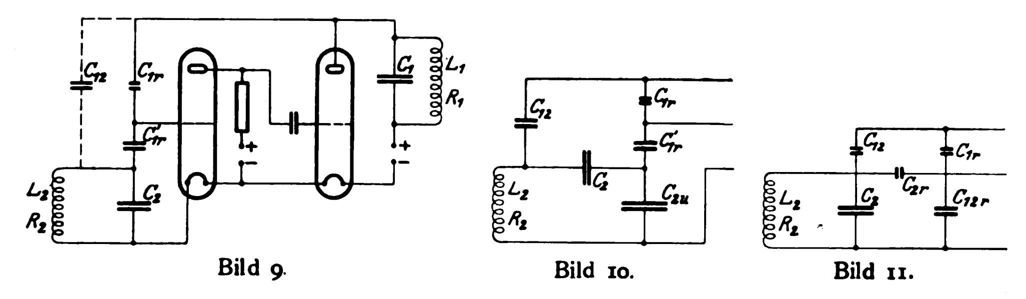


Bild 9. Bild 10. Bild 11.

primäre Rückkopplung durch C_{1r}' sehr fein regulierbar ist. Um aber die sekundäre Rückkopplung kontinuierlich veränderlich zu machen, wird man dem Kondensator C_2 einen Kapazitätskanal (C_{2r}, C_{12r}) parallel legen, welchen man mit dem Kanal für die primäre Rückkopplung durch C_{12r} vereinigen kann (Bild 11). Die Kopplung zwischen den Kreisen kann durch C_{12}, die primäre Rückkopplung durch C_{1r}, die sekundäre durch C_{2r} reguliert werden. Dies gilt nicht in aller Strenge, da auch C_{1r} eine Kopplung zwischen den Kreisen hervorruft, aber es kann C_{2r} klein gegen C_{12r} gehalten werden usw. Die elektrische Kopplung C_{12} kann durch eine magnetische ersetzt werden. Ist diese der elektrischen entgegengesetzt, so muß der Sekundärkreis tiefer gestimmt sein, wenn die Rückkopplung jeder Schwingung für sich regulierbar sein soll, indem die tiefere Frequenz durch die sekundäre, die höhere durch die primäre Rückkopplung hervorgebracht werden kann.

Zur Ermittlung der Größen, welche an die Stelle von S und R_i treten, berechnen wir die Spannung $\mathfrak{e}_g'$, welche am Gitter des Hauptrohres auftritt. Diese Spannung können wir uns in zwei Teile $\mathfrak{e}_{g1}' + \mathfrak{e}_{g2}'$ zerlegt denken in der Weise, daß $\mathfrak{e}_{g1}'$ durch die Spannung $\mathfrak{e}_a$ am Primärkreise, $\mathfrak{e}_{g2}'$ durch die Spannung $\mathfrak{e}_g$ am Sekundärkreise hervorgerufen wird. Für die Schaltung in Bild 11 ergeben sich die Näherungswerte[1]):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{e}_{g1}' &= -\mathfrak{e}_a \frac{C_{1r}}{C_{1r} + C_{12r}} \cdot \frac{1}{D'} \cdot \frac{W}{W + R_i'} \\ \mathfrak{e}_{g2}' &= -\mathfrak{e}_g \frac{C_{2r}}{C_{2r} + C_{12r}} \cdot \frac{1}{D'} \cdot \frac{W}{W + R_i'} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Die Summe beider Ausdrücke liefern die Spannung $\mathfrak{e}_g'$ am Hauptrohr und wird dieser Wert in den linearen Ansatz eingeführt, so erhält man

[1]) Die genaue Bestimmung bietet keine Schwierigkeiten. Vgl. Teil II Art. 9 Anm.

$$\left.\begin{aligned} S' &= -S \frac{C_{2r}}{C_{2r} + C_{12r}} \frac{1}{D'} \frac{W}{W + R_i'} \\ \frac{1}{R_n} &= -S \frac{C_{1r}}{C_{1r} + C_{12r}} \frac{1}{D'} \frac{W}{W + R_i'} + \frac{1}{R_i} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Für die Konstante η_e ist zu setzen:

$$\eta_e = \frac{C_{12}}{C_2'} \cdot S' R_n = \frac{C_{12}}{C_2'} \cdot \frac{\frac{C_{2r}}{C_{2r} + C_{12r}}}{\frac{C_{1r}}{C_{1r} + C_{12r}} - D D' \frac{W + R_i'}{W}} \quad (3)$$

Da sowohl S' wie R_n negativ sind, so wird η_e positiv, während q negative Werte annimmt, und es erhellt, daß die Fortsetzung der für die Schaltung in Bild 1 ermittelten Kurven in negatives Gebiet von q auf die entwickelten Schaltungen Anwendung findet.

12. Primäre und sekundäre Rückkopplung bei elektrischer und magnetischer Kopplung der Kreise.

Zufolge des vorigen Artikels sind bei Betrachtung von primärer und sekundärer Rückkopplung die Kurven für sekundäre Rückkopplung in negatives Gebiet von q fortzusetzen. Für positives η_e und η_m fanden wir in Art. 6 (6) einen begrenzten Bereich möglicher Frequenzen. Bei Fortsetzung der Kurven kommen die anstoßenden Frequenzstreifen in Frage, so daß wie in Art. 9 beide Schwingungen rückgekoppelt sein können.

Die Stelle, an welcher beide Schwingungen die gleiche Rückkopplung besitzen, gibt uns der Doppelpunkt von Art. 9 (4) und (5) an. Bei elektrischer Kopplung der Kreise findet man

$$c - m_e = \frac{(1 + \eta_e)\left(1 + m_e \frac{n_{12}}{n_2}\right)}{1 - \eta_e \frac{n_{12}}{n_2}} \qquad -q = \frac{(n_{12} + n_2)\left(1 + m_e \frac{n_{12}}{n_2}\right)}{1 - \eta_e \frac{n_{12}}{n_2}} \quad (1)$$

Das Auswechseln der Schwingungen erfolgt also bei Werten von $c > 1$. Die Ausführungen des vorigen Artikels lassen dies ohne weiteres erkennen. Denn sobald die Kreise nur im richtigen Sinne verstimmt sind, wird die Rückkopplung jeder der beiden Schwingungen für sich regulierbar, und man kann es bei jeder Einstellung der Kreise dahin bringen, daß die Rückkopplung für beide Frequenzen gleich groß wird.

In Bild 13 ist der Verlauf der Kurve gezeichnet. Zur näheren Erläuterung ist Bild 12 beigefügt. In dieser sind drei kubische Unikursalen mit den Gleichungen

$$z^3 - a z^2 = y^2 \qquad (a = 1,\ 0,\ -1) \quad (2)$$

gezeichnet, je nachdem der Doppelpunkt $y = 0$, $z = 0$ der Kurve isoliert ist, die Kurve in ihm eine Spitze hat oder sich selbst schneidet eine Schleife bildend. Ziehen wir durch die letztere Kurve eine Gerade, welche die Schleife schneidet und führen eine Zentralprojektion aus, so daß diese Gerade in das Unendliche fällt, so erhalten wir Bild 13. Besonders eingezeichnet ist die Wendetangente der Kurve[1]) welcher in Bild 12 die unendlich ferne Gerade entspricht. Aus der Lage derselben läßt sich

[1]) Schneidet die Kurve sich im Doppelpunkt selbst, so besitzt sie nur eine reelle Wendetangente. Ist der Doppelpunkt ein isolierter, so sind alle drei Wendetangenten reell. Hat die Gleichung die Form

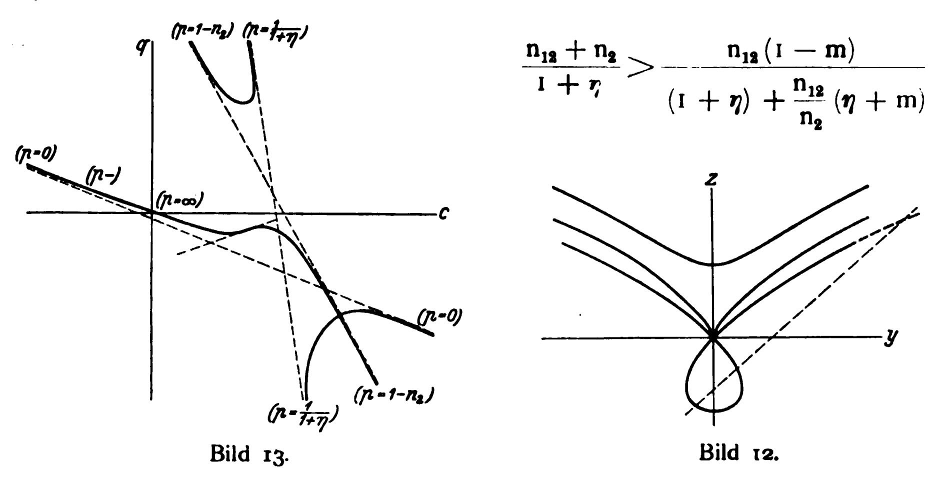
$$z^3 = (z^2 + z y + y^2) x,$$

so permutieren sich dieselben bei Ausübuug von unimodularen Substitutionen. Die Erzeugenden dieser Gruppe sind

$$x = x' + y' - z' \qquad y = z' \qquad z = y'$$
$$x = x' \qquad y = -y' - z' \qquad z = z'.$$

auf die durch sekundäre Rückkopplung hervorgebrachte Ausbuchtung der Kurve in der Nähe der Resonanz schließen. Das von der Schleife abgeschnittene Stück liefert den obereren Kurvenzipfel, welcher dem in Art. 5 untersuchten Fall angehört. Solange dieser Zipfel vorhanden ist, wird die Schleife von der unendlich fernen Geraden geschnitten, und es muß die Kurve im Doppelpunkt sich selbst schneiden. Bei abnehmender Kopplung der Kreise rückt der Zipfel immer höher, so daß schließlich die Schleife ganz in negativem Gebiet von q verläuft. Diese kann sich ganz zusammenziehen in eine Spitze ausartend ($a = 0$). Sobald aber der Doppelpunkt ein isolierter geworden ist, kann ein Auswechseln der Schwingungen nicht mehr stattfinden, was aber nur bei sehr loser Kopplung zwischen den Kreisen wirklich eintritt.

Ein ganz ähnliches Verhalten zeigen die Kurven, wenn man eine entgegengesetzte magnetische Kopplung hinzusetzt. Im Falle der Entkopplung ist der Doppelpunkt stets isoliert. Um dies zu beweisen, betrachte man die Ausdrücke für q im Doppelpunkt und für die dritte noch vorhandene Lösung, Art. 9, (6) und (9). Es ist $-\eta$ für η' zu setzen und q negativ anzunehmen, dann folgt aus der Ungleichheit



$$\frac{n_{12} + n_2}{1 + \eta} > \frac{n_{12}(1 - m)}{(1 + \eta) + \frac{n_{12}}{n_2}(\eta + m)}$$

Bild 13. Bild 12.

die Behauptung. Damit ist aber zugleich auch der obere Zipfel verschwunden und das in Art. 6 erhaltene Ergebnis bezüglich der Entkopplung ist aufs neue einzusehen. Wird die magnetische Kopplung überwiegend, so befindet sich der Doppelpunkt links von der Resonanzlage und der obere Zipfel tritt wiederum auf, sobald die Schleife von der unendlich fernen Geraden geschnitten wird.

13. Primäre Rückkopplung bei elektrischer Kopplung der Kreise.

Die Betrachtungen des vorigen Artikels waren sehr allgemein gehalten. Wir betrachten daher noch einige spezielle Fälle. Die Kreise seien nur elektrisch gekoppelt und es sei nur primäre Rückkopplung vorhanden. Dann ist in Bild 10 der Kondensator C_{gu} kurz zu schließen und in Bild 11 der Kondensator C_{gr} fortzulassen. In den Gleichungen von Art. 5 ist $\eta_e = 0$. Insbesondere nimmt die erste Gleichung in (4) und die zweite Gleichung in (6) die Form an:

$$-q = \frac{n_{12}}{p + n_1} + \frac{m_e n_2 p}{(p - 1)^2 + p n_2} \tag{1}$$

$$c - m_e = \frac{1}{p + n_1} + \frac{m_e (p - 1)}{(p - 1)^2 + p n_2} \tag{2}$$

Vernachlässigt man in der zweiten Gleichung n_1 gegen p, so wird dieselbe vom Widerstand des Primärkreises unabhängig. Für die erste Gleichung trifft dies keineswegs zu. Sobald aber Induktivität oder Kapazität des Sekundärkreises geändert



werden, fällt dieser Umstand fort. Die Änderung der Kapazität kann freilich nur so vorgenommen werden, daß man in den Induktivitätszweig einen Kondensator einschaltet. Dieser sei mit C_{2v} bezeichnet. Wir gehen zurück auf die ursprüngliche Gleichung von Art. 3, (1) und diese nimmt für den vorliegenden Zweck die Gestalt an

$$\left(\frac{1}{R_1 + L_1 x} + C_1' x + \frac{1}{R_n}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{C_{2v} x} + R_2 + L_2 x} + C_2' x\right) = C_{12}'^2 x^2. \tag{3}$$

Den zweiten Faktor formen wir ein wenig um und bringen ihn auf die andere Seite

$$\frac{1}{R_1 + L_1 x} + C_1' x + \frac{1}{R_n} = \frac{C_{12}^2 x}{C_2'} \cdot \frac{\frac{1}{C_{2v} x} + R_2 + L_2 x}{\frac{1}{C_2' x} + \frac{1}{C_{2v} x} + R_2 + L_2 x}$$

oder

$$\frac{1}{R_1 + L_1 x} + C_1' x + \frac{1}{R_n} = \frac{C_{12}^2 x}{C_2'} - \left(\frac{C_{12}}{C_2'}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_{2v}}\right)\frac{1}{x} + R_2 + L_2 x}. \tag{5}$$

Nun kann $\frac{C_{12}^2 x}{C_2'}$ mit $C_1' x$ vereinigt werden und gesetzt werden:

$$C_1'\left(1 - \frac{C_{12}^2}{C_1' C_2'}\right) = C_1'' \qquad \frac{1}{C_2'} + \frac{1}{C_{2v}} = \frac{1}{C_2''}. \tag{6}$$

Es folgt die Gleichung

$$\left(\frac{1}{R_1 + L_1 x} + C_1'' x + \frac{1}{R_n}\right)\left(\frac{1}{C_2'' x} + R_2 + L_2 x\right) + \left(\frac{C_{12}}{C_2'}\right)^2 = 0. \tag{7}$$

Entwickelt man in (5) den rein imaginären Teil, so fällt R_n heraus und es ergibt sich die Frequenzgleichung

$$C_1'' = \frac{L_1}{R_1^2 + (L_1 \omega)^2} + \left(\frac{C_{12}}{C_2'}\right)^2 \frac{L_2 \omega - \frac{1}{C_2'' \omega}}{R_2^2 + \left(L_2 \omega - \frac{1}{C_2'' \omega}\right)}. \tag{8}$$

Dieselbe kann auf (2) zurückgeführt werden. Im folgenden sei jedoch L_2 oder C_2'' (vermittels C_{2v}) variabel. Nun bemerkt man sogleich, daß L_2 und C_2'' in (8) nur in der Verbindnng $L_2 \omega - \frac{1}{C_2'' \omega}$ auftreten, so daß in beiden Fällen der algebraische Zusammenhang derselbe ist[1]). Die weiteren Entwicklungen beziehen sich auf den Fall variabler Selbstinduktion, weil die Rechnung sich etwas einfacher gestaltet. Wir formen (7) um zu

---

[1]) Die Substitutionen

$$p = \frac{1}{1 - \varkappa}, \qquad l = 1 - \varkappa + \lambda m_e. \qquad r = \frac{\varkappa}{\lambda m_e}, \qquad \frac{n}{m_e^2} = \mu$$

führen (14) über in

$$\varkappa \lambda^2 + \lambda(\varkappa - 1) - \mu \varkappa (\varkappa - 1) = 0.$$

Das zugehörige elliptische Integral

$$\int \frac{d\varkappa}{\sqrt{(\varkappa - 1)(4\mu\varkappa^2 + \varkappa - 1)}}$$

hat die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1} = \frac{1}{4}\text{ Periode},$$

woraus sich die Vereinfachungen gegenüber Art. 6 der Dissertation erklären.

$$\left[\frac{1}{C_1''x}\left(1+\frac{R_1}{R_n}\right)+\left(R_1+\frac{L_1}{C_1''R_n}\right)+L_1x\right]\left[\frac{1}{C_2''x}+R_2+L_2x\right]+\left(\frac{C_{12}}{C_2'}\right)^2\frac{R_1+L_1x}{C_1''x}=0 \qquad (9)$$

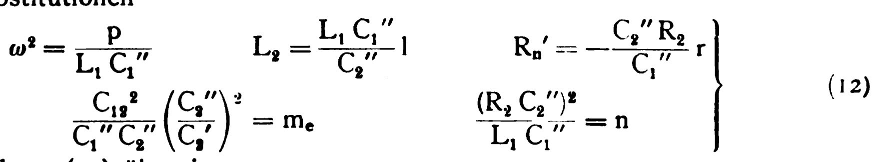
setzen

$$R_1+\frac{L_1}{C_1''R_n}=R_n' \qquad (10)$$

und vernachlässigen $\frac{R_1}{R_n}$ gegen 1 und auf der rechten Seite R_1 gegen L_1x

$$\left(\frac{1}{C_1''x}+R_n'+L_1x\right)\left(\frac{1}{C_2''x}+R_2+L_2x\right)+\left(\frac{C_{12}}{C_2'}\right)^2\frac{L_1}{C_1''}=0. \qquad (11)$$

Die Substitutionen



$$\left.\begin{aligned}&\omega^2=\frac{p}{L_1C_1''} \qquad L_2=\frac{L_1C_1''}{C_2''}l \qquad R_n'=-\frac{C_2''R_2}{C_1''}r\\&\frac{C_{12}^2}{C_1''C_2''}\left(\frac{C_2''}{C_2'}\right)^2=m_e \qquad \frac{(R_2C_2'')^2}{L_1C_1''}=n\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

führen (11) über in

$$(1-rj\sqrt{np}-p)(1+j\sqrt{np}-lp)-m_e p=0. \qquad (13)$$

Die Trennung von Reellem und Imaginärem ergibt:

$$r=\frac{p-1}{pl-1}=\frac{m_e p-(pl-1)(p-1)}{np}. \qquad (14)$$

Die Gleichung läßt die Umformung zu:

$$r=\frac{p-1}{pl-1}=\frac{m_e p}{(pl-1)^2+pn}. \qquad (15)$$

Die Elimination von p ergibt:

$$r(l-1)^2+(rn-m_e)(r-1)(lr-1)=0. \qquad (16)$$

Die Stelle, an der beide Schwingungen die gleiche Rückkopplung besitzen, ergibt sich wiederum aus $\beta=0$, $\delta=0$. Man findet etwa aus (13) die Werte $l=1$, $r=1$. Diese in (14) eingesetzt, liefern die zugehörigen Frequenzen:

$$l=1 \qquad r=1 \qquad (p-1)^2+p(n-m_e)=0. \qquad (17)$$

Für die dritte Lösung erhält man

$$l=1 \qquad r=\frac{m_e}{n} \qquad p=1. \qquad (18)$$

Bild 14.

Solange $n>m_e$ ist, fallen die Frequenzen in (17) imaginär aus, der Doppelpunkt ist ein isolierter und die Kurve verläuft unterhalb desselben (Bild 14). Für $n=m_e$ erhalten wir die Doppellösung $p=1$, und diese ist gleich der dritten Lösung in (18), indem auch $r=1$ wird. Die Kurve zieht sich bis zum Doppelpunkt hinauf, daselbst eine Spitze bildend. Für $n<m_e$ ergeben sich drei verschiedene Frequenzen und die Rückkopplungskurve durchschneidet sich in dem Doppelpunkt, oberhalb desselben eine Schleife bildend (Bild 14).

Das, was wir bei sekundärer Rückkopplung für die eine mögliche Schwingung zeigten, gilt bei primärer Rückkopplung für beide, nämlich daß nicht für alle Einstellungen der Kreise eine zur Aufrechterhaltung der Schwingung hinreichende Rückkopplung vorhanden ist. Dieses Ergebnis, welches den Kern meiner Inauguraldissertation Juli 1919[1]), bildet, wurde allgemein der bezeichneten Arbeit entnommen.

Die Rückkopplungskurve in (16) zeigt genau bei Resonanz ein Maximum wie aus

$$r=\frac{m_e}{n} \qquad (l-1)^2=0 \qquad (19)$$

[1]) Über den Zwischenkreis-Röhrensender. Bd. IX, 127.

folgt. Für Maximum und Minimum der Frequenz findet man

$$p\,l - 1 = \pm\sqrt{p\,n} \qquad r = \frac{1}{2}\frac{m_e}{n}. \tag{20}$$

14. Primäre und sekundäre Rückkopplung bei magnetischer Kopplung der Kreise.

Die Kreise seien nur magnetisch gekoppelt, jedoch primäre und sekundäre Rückkopplung vorhanden. Dann gilt die Gleichung von Art. 2 (1), wenn R_n statt R_i gesetzt wird. Es werde die Sekundärkapazität als variabel angesehen und daher gesetzt:

$$R_1 + \frac{L_1}{R_n C_1} = R_n'. \tag{1}$$

Werden vernachlässigbare Glieder fortgelassen, so folgt die Gleichung

$$(1 + R_n' C_1 x + L_1 C_1 x^2)(1 + R_2 C_2 x + L_2 C_2 x^2) - S L_{12} x - L_{12}^2 C_1 C_2 x^4 = 0.$$

Nach Ausführung der Substitutionen

$$\left.\begin{array}{lll} \omega^2 = \frac{p}{L_1 C_1} & C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2} c & R_n' = -\frac{L_1 R_2}{L_2} r \\ \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} = m & \frac{L_1 C_1 R_2^2}{L_2^2} = n & \frac{R_1 L_2}{R_2 L_1} = r_1 \\ \multicolumn{3}{c}{\frac{L_{12} S R_n}{L_1} = \frac{L_{12} S}{C_1 (R_n' - R_1)} = \eta} \end{array}\right\} \tag{2}$$

liefert die Trennung von Reellem und Imaginärem das Gleichungssystem

$$r = \frac{p - 1 - \frac{r_1}{c}\eta}{p - \frac{1}{c}(1-\eta)} = \frac{m p^2 - (p-1)\left(p - \frac{1}{c}\right)}{p\,n} \tag{3}$$

für den Doppelpunkt $\beta = 0$, $\delta = 0$ und die ihm zugehörigen Frequenzen findet man

$$\left.\begin{array}{l} r = 1 \qquad c = c_0 = 1 - \eta(1 + r_1) \\ p^2(1 - m) - p\left(1 + \frac{1}{c_0} - n\right) + \frac{1}{c_0} = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

Da S negativ anzunehmen ist, wird für positives L_{12} η positiv und $c_0 < 1$. Die Stelle, bei welcher das Auswechseln der Schwingungen erfolgt, wird mit wachsendem η zu kleineren Kapazitätswerten verschoben und kann bei genügend großem η in negatives Gebiet von c rücken, bei negativem L_{12} hingegen ist $c_0 > 1$. Indessen was die Verhältnisse bei vorherrschender Kopplung anbetrifft, verweise ich auf die Untersuchung von Rogowski.

Zunächst bestimmen wir die kritische Kopplung aus (4), indem wir die beiden dem Doppelpunkt zugehörigen Frequenzen einander gleich werden lassen. Dies ergibt die Bedingung·

$$\left(1 - \frac{1}{c_0}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{c_0}\right) n + n^2 + \frac{4m}{c_0} = 0. \tag{5}$$

Das Glied n^2 kann vernachlässigt werden. Zur Klarstellung der Größenordnungen schreiben wir die Gleichung

$$\left(\frac{1 + r_1}{2}\right)^2 + \frac{m c_0}{\eta^2} = c_0 \frac{c_0 + 1}{2} \cdot \frac{n}{\eta^2}, \tag{6}$$

in der $(1 + r_1)^2 \eta^2$ für $(c_0 - 1)^2$ zufolge (4) gesetzt ist. Die Größe η hängt zufolge (2) von allen drei Kopplungen ab. Hingegen ist



$$\frac{m}{\eta^2} = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{1}{S^2 R_n^2} \tag{7}$$

von der Kopplung zwischen den Kreisen unabhängig. Dieser Wert habe die Größenordnung 10^{-2}. Wir betrachten den Fall, daß $\frac{1 + r_1}{2}$ in der Größenordnung von 1 liegt. Dies bedeutet, daß die Dämpfung des Sekundärkreises zwar beliebig viel größer, aber nicht wesentlich kleiner sein darf als die Dämpfung des Primärkreises. Für die Größe n, von der die Dämpfung des Sekundärkreises abhängt, kommen Werte zwischen 10^{-2} und 10^{-4} in Frage. Da die linke Seite von (6) in der Größenordnung von 1 liegt, so folgt nunmehr für η die Größenordnung 10^{-1} bis 10^{-2}. Somit liegt c_0 in (4) nahe bei 1. Kritische Verhältnisse können, wie es physikalisch wahrscheinlich ist, nur in der Nähe der Resonanz auftreten. Da für die rechte Seite in (7) die Größenordnung 10^{-2} angenommen war, folgt für m die Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-6}. m ist bei kritischer Kopplung von kleinerer Größenordnung als n.

Im folgenden ist vorausgesetzt, daß $\frac{m}{r_1 \eta}$ klein gegen 1 ist. Um den Kurvenverlauf zu ermitteln, suchen wir einzelne Punkte auf. $r = 0$ ergibt in (3)

$$\left.\begin{aligned} p = 1 + \frac{r_1 \eta}{c} \qquad m(c + r_1 \eta)^2 - r_1 \eta (c + r_1 \eta - 1) = 0 \\ c = \frac{r_1 \eta}{2m}\left(1 - 2m \pm \sqrt{1 - \frac{4m}{r_1 \eta}}\right). \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bild 15.

Die Entwicklung der Quadratwurzel liefert die Werte:

$$c_1 = 1 - r_1 \eta \qquad c_2 = \frac{r_1 \eta}{m} - r_1 \eta - 1. \tag{9}$$

Bei posisivem η liegt c_1 vor der Resonanz, c_2 hinter der Resonanz, aber sehr weit weg von dieser. Bei negativem η liegt c_1 hinter der Resonanz, c_2 sehr weit im negativen Gebiet von c. Letzterer Fall ist in Bild 15 dargestellt. Für $c = \infty$ erhalten wir aus (3)

$$r = \frac{p - 1}{p} = \frac{1 - p(1 - m)}{n} \sim m \tag{10}$$

wie bei primärer Rückkopplung, denn für diesen Fall ist die sekundäre Rückkopplung unwirksam. $c = 0$ liefert:

$$r = \frac{r_1 \eta}{1 - \eta} \qquad p = 1. \tag{11}$$

Bei positivem η verläuft die Kurve wenig oberhalb, bei negativem η wenig unterhalb des Koordinatenursprungs. Aus diesen Einzelheiten folgt, daß die Rückkopplungskurve in der Nähe der Resonanz ein durch sekundäre Rückkopplung hervorgebrachtes Minimum aufweist. Dasselbe kann den Wert $-r_1$ nicht erreichen, weil für diesen Wert von r zufolge (2) S zu Null wird.

15. Schwebungen bei Stoßerregung.

Die vorstehenden Untersuchungen hatten den linearen Ansatz von Art. 1 (1) zur Grundlage. Es ergab sich daraus eine Abhängigkeit, welche ein relatives Maß der Rückkopplung der einzelnen Schwingung darstellte. Auch war es möglich, zu beurteilen, ob beide Schwingungen die gleiche Rückkopplung aufweisen oder die eine stärker als die andere rückgekoppelt ist. Das Verhalten der beiden Schwin-

gungen, sobald sie vorübergehend oder dauernd gleichzeitig vorhanden sind, wurde in keiner Weise berührt. Die lineare homogene Differentialgleichung, auf welche der lineare Ansatz führt, fordert vielmehr eine völlige Unabhängigkeit beider Schwingungen voneinander, was nur bei sehr loser Rückkopplung annähernd zutreffen kann. Es unterliegt indessen keinem Zweifel, daß die Fälle derartiger Vorgänge, für welche ein stationärer Zustand möglich wird, ein erhebliches physikalisches Interesse beanspruchen. In diesem und in folgendem Artikel werden wir zwei gänzlich verschiedene Arten stationärer Schwebungen erörtern. Diese Vorgänge wurden bereits oszillographisch genau untersucht, wobei viele interessante Einzelheiten zutage traten. Im folgenden handelt es sich vorwiegend darum, den innigen Zusammenhang dieses Gegenstandes mit den entwickelten Schaltungen klarzulegen.

Daß bei kapazitiv abgeriegeltem Gitter ein Elektronenrohr in gekoppelten Kreisen Schwebungen erzeugen kann, wurde bereits von Armstrong bemerkt. Ähnliches wurde von Leithäuser und mir am Zweiröhrensystem beobachtet. Schon damals fiel die außerordentliche Stabilität des Vorganges, die in solchen Anordnungen erzielt werden konnte, auf. Dies veranlaßte mich, den Gegenstand näher zu untersuchen. Die in Bild 16 gegebene Konstruktion habe ich bereits vor einem Jahre ausgeführt und sie ist seitdem engerem Fachkreise bekannt geworden.

Vorerst ist das Verhalten einer Röhre bei kapazitiv abgeriegeltem Gitter zu betrachten. Bei dem Zweiröhrensystem bezieht sich die Erörterung zunächst nur auf das Hauptrohr, welches die verstärkte Spannung erhält. Sobald Schwingungen vorhanden sind, werden diese zufolge der einseitigen Leitfähigkeit der Röhre auf dem Gitter ein negatives Potential hervorrufen. Dieses negative Potential kann erhebliche Werte annehmen und führt eine ausgeprägte stoßweise Erregung der Schwingung herbei. Solange man durch Rückkopplung die Amplitude noch erhöhen kann, wird das mittlere negative Potential des Gitters immer tiefere Werte erhalten und der Anodengleichstrom des Hauptrohres fortgesetzt abnehmen. Die in Schwingungsenergie umgesetzte Leistung wächst bei beständiger Abnahme der aufgewendeten Leistung. Diese entgegengesetzten Vorgänge führen in der Tat dazu, daß bei Steigerung der Rückkopplung an einer bestimmten Stelle der Schwingungszustand zusammenfällt. Danach wird das Hauptrohr eine Zeit lang verriegelt sein. Erst nach Abfluß der negativen Ladung setzen die Schwingungen wieder ein, und es wiederholt sich der Vorgang. Je hochohmiger die Ableitung zwischen Gitter und Kathode der Röhre und je größer die Kapazität des Abriegelungskondensators ist, um so länger wird die Zeit des Abfließens der negativen Ladung ausfallen. Im folgenden ist vorausgesetzt, daß diese Zeit groß ist gegen die Schwebungsperiode.

Zunächst betrachten wir den Fall, in welchem der Sekundärkreis nicht an der Rückkopplung teilnimmt, also nur primäre Rückkopplung vorhanden ist. Dann befinden sich oberhalb der kritischen Kopplung in der Nähe der Abstimmung beider Kreise zwei gleich stark rückgekoppelte Schwingungen. Daß es einen Zustand gibt, in welchem beide Schwingungen zugleich auftreten, wird folgendermaßen ersichtlich. Indem nämlich sich stationäre Schwebungen herstellen, pendelt die Schwingungsenergie zwischen Primärkreis und Sekundärkreis in der Periode der Schwebungen hin und her. Befindet sich die Schwingungsenergie vorzugsweise im Sekundärkreis, heben sich also die Schwingungen im primären System annähernd auf, so erscheint das Hauptrohr infolge des mittleren negativen Potentials auf dem Gitter verriegelt und das gekoppelte System schwingt während dieser Zeit frei. Hingegen befindet sich die Schwingungsenergie vorzugsweise im Primärkreis, so arbeitet das Hauptrohr auf diesen und ersetzt nicht nur den zuvor im Sekundärkreis verbrauchten Bruchteil an Energie, sondern auch den des Primärkreises. Aber es ist ebenso notwendig, daß in dieser Zeit größter Wechselspannungen am Gitter des Hauptrohres das mittlere negative Potential auf dem Gitter regeneriert wird, indem die



maximalen Spannungen positive Werte erreichen und in dieser Zeit der durch Entladung verlorene Bruchteil des mittleren negativen Potentials ersetzt wird. Bild 16 zeigt den Verlauf der Spannung am Gitter des Hauptrohres bei Gleichheit der Amplituden der beiden Schwingungen, darunter den gleichzeitigen Verlauf des Anodenstroms im Hauptrohr. Man erkennt, daß es sich um eine Fortbildung der stoßweißen Erregung handelt und zwar ausgedehnt über die Periode der Schwebungen. Auch ist die Stabilität des Vorganges auf den Umstand gegründet, daß das Gitter des Hauptrohres nur in einem kleinen Zeitraum innerhalb dieser Periode negativ aufgeladen wird, während es bei einer einzelnen Schwingung dauernd aufgeladen wird. Es erklärt sich daraus, daß bei starken Rückkopplungen nahe am Ein- und Aussetzen der Schwingungen nur Schwebungen auftreten und nicht etwa die eine oder die andere Kopplungsfrequenz vorhanden sein kann. Bei Abnahme der Rückkopplung gibt es einen engen Bereich, in welchem alle drei Zustände möglich sind, unterhalb desselben sind Schwebungen im stabilen Zustand nicht mehr zu erhalten.

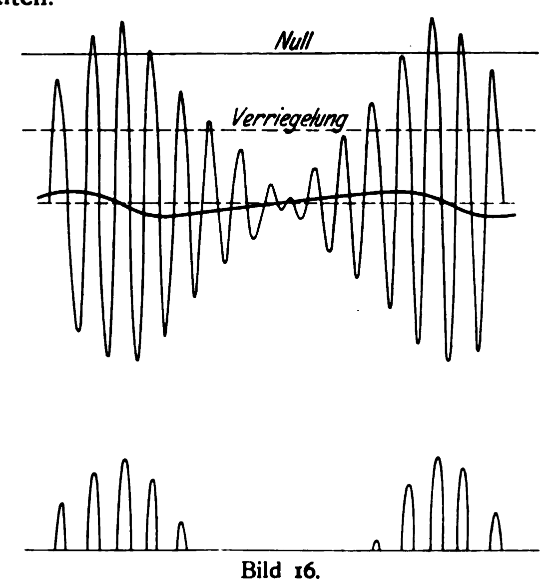


Bild 16.

Beim Zweiröhrensystem fördert die verstärkende Wirkung des Vorrohres den Vorgang wesentlich. Aber auch der Umstand, daß die Rückkopplung in weiten Grenzen geändert werden kann, ohne daß dadurch eine merkliche Verstimmung der Kreise herbeigeführt wird, trägt dazu bei.

Fügt man sekundäre Rückkopplung hinzu, so müssen die Kreise verstimmt werden, damit zwei gleich stark rückgekoppelte Schwingungen vorhanden sind. Es wird dann in dem einzelnen Kreise diejenige Kopplungsschwingung überwiegen, welche der Eigenschwingung desselben näher liegt. Es lassen sich durch Regulierung der beiden Rückkopplungen die Spannungen am Gitter stets so zusammensetzen, daß beide Schwingungen annähernd die gleiche Amplitude haben. Der Vorgang stellt sich dann offenbar so dar, daß der Schwingung im Primärkreise nur zeitweise Anodenstrom zugeführt wird. Ein besonderes Interesse verdienen die harmonischen Intervalle, welche einer genauen oszillographischen Untersuchung unterzogen worden sind. Für diesen Zweck ist die Schaltung in Bild 11 geeignet, weil die Rückkopplungen beider Schwingungen unabhängig voneinander regulierbar sind. Erwähnenswert bleibt aber, daß die Schaltung in Bild 5 dieser völlig äquivalent wird, sobald elektrische und magnetische Kopplung zwischen den Kreisen verwendet wird (Art. 9 $-\eta_e' > 1$, $\eta_m' > 1$), und man kann mit derselben die gleichen Oszillo-

gramme produzieren. Sie kann aber experimentell mit der Schaltung in Bild 11 nicht in Wettbewerb treten, da die Rückkopplungen der beiden Schwingungen nicht unabhängig voneinander geändert werden können. Die Schaltung in Bild 11 kann kontinuierlich in den Fall primärer Rückkopplung übergeführt werden, für die Schaltung in Bild 5 ist dies ausgeschlossen.

16. Schwebungen bei anomalem Verlauf der Rückkopplungskurve.

Eine Möglichkeit, langsame stabile Schwebungen herzustellen, ergibt sich, sobald die Rückkopplungskurve einen Verlauf annimmt, wie er in Bild 17 gezeichnet ist. Die Herstellung einer solchen Anomalie ist keineswegs an den speziellen Umstand gebunden, welche im folgenden Verwertung findet.

Die nähere Untersuchung der kritischen Kopplung bei primärer und sekundärer Rückkopplung ergibt, daß eine Drehung der Schleife nach der einen oder anderen Richtung nur bei wesentlich verschiedener Dämpfung der beiden Kreise stattfindet und auch dann sind die Abweichungen nur unbeträchtlich. Läßt man jedoch das Vorrohr in der Nähe der unteren Krümmung der Charakteristik arbeiten, so wird mit wachsender Rückkopplung der innere Widerstand R_i' des Vorrohres größer werden, ebenso die in Art. 11 (3) eingeführte Größe η zunehmen, sodaß mit

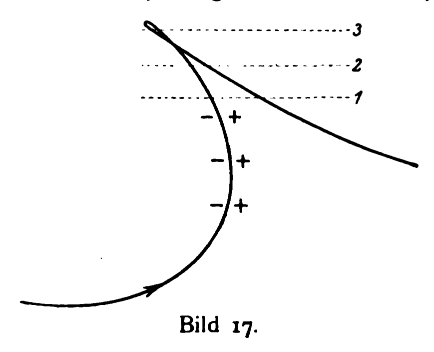


Bild 17.

wachsender Rückkopplung die sekundäre Rückkopplung gegenüber der primären Rückkopplung etwas bevorzugt erscheint. Unter diesen Umständen beobachtet man bei geeigneten Rückkopplungsgraden, daß die von der sekundären Rückkopplung bevorzugte Schwingung bei fortschreitender Kapazitätsänderung plötzlich abklingt, während die andere Schwingung garnicht oder nur schwach anklingt. Erforderlich ist auch hierbei, daß im allgemeinen bis zu losesten Rückkopplungen der Schwingung die Amplitude kontinuierlich abnimmt und ebenso beim Einsetzen allmählich anklingt. Man erreicht dies, indem man das Gitter des Hauptrohres durch einen hochohmigen (physikalisch definierten) Widerstand in geeignetem Maße negativ vorspannt, wie in Bild 5 angedeutet ist.

Durchläuft man die Kurve in Bild 17 in angegebener Richtung, so ist rechts von ihr die Dämpfung der jeweiligen Schwingung positiv, links davon negativ. Im Rückkehrpunkt klingt also die Schwingung ab. Tatsächlich wird der Rückkehrpunkt nicht erreicht, denn infolge der ungleich einwirkenden Rückkopplung muß die Schwingung zuvor abklingen. Man kann dies in einfachster Weise zeigen, indem man bei kontinuierlicher Kapazitätsänderung die Stelle des Abklingens sich merkt, das zweite Mal kurz vor dieser Stelle stehen bleibt. Man beobachtet oft nach Ablauf mehrerer Sekunden ein selbsttätiges plötzliches Abklingen. Zur genaueren Beschreibung der Erscheinungen sind im wesentlichen drei Rückkopplungsgrade entsprechend den eingezeichneten Geraden zu unterscheiden. Im ersten Falle tritt beim Abklingen der von der sekundären Rückkopplung bevorzugten Schwingung die zweite Schwingung überhaupt nicht auf, und erst bei fortschreitender Kapazitäts-



änderung klingt diese kontinuierlich an. Geht man in das anomale Gebiet zurück, so kommt man an einen Punkt, in welchem die erste Schwingung anklingt, um auf den unteren Wert der Kurve durchzubrechen. Dies kann aber durch rechtzeitige fortschreitende Kapazitätsänderung verhindert werden, so daß die Schwingung wiederum abklingt. Im zweiten Falle klingt die zweite Schwingung an, sobald die Amplitude der ersten genügend klein geworden ist, indem sie mit dieser noch einige Schwebungen bilden kann. Beim Zurückkehren in das anomale Gebiet verschwindet dieselbe kontinuierlich, so daß es noch einen engen Bereich gibt, in welchem keine Schwingung vorhanden ist. Im dritten Falle treten im anomalen Gebiet Schwebungen auf. Diese Schwebungen bilden sich entweder schon beim Abklingen der ersten Schwingung oder beim Zurückkehren in das anomale Gebiet. Die Schwebungen kommen offenbar in der Weise zustande, daß nicht nur die zweite Schwingung dauernd vorhanden ist, sondern auch die erste Schwingung auf dem rückläufigen Teil der Kurve miterregt wird. Bei wesentlich stärkeren Rückkopplungen tritt im anomalen Gebiet nur die zweite Schwingung auf. Sobald aber Schwebungen vorhanden sind, werden diese beim Rückgang immer langsamer, bis die erste Schwingung auf den unteren Kurventeil durchbricht. Es folgt daraus, daß die Frequenz denselben Verlauf nimmt wie in den bisherigen Untersuchungen. Diese Erscheinungen geben einen tieferen Einblick in die Natur rückgekoppelter Schwingungen.

Zusammenfassung.

Es werden drei Schaltungsarten angegeben, durch welche gekoppelte Kreise zu Schwingungen erregt werden können, und nach ein und demselben Gleichungssystem behandelt. Die erste Schaltung entsteht, wenn der eine Kreis in den Anodenkreis, der andere in den Gitterkreis einer Röhre gelegt wird. In der zweiten Schaltung tritt an die Stelle der einen Röhre das Zweiröhrensystem und dies wird analytisch durch ein negatives S ausgedrückt. In der dritten Schaltung ist das Zweiröhrensystem so geschaltet, daß an Stelle von S und R_i negative Größen treten.

Es werden zwei Möglichkeiten erörtert, in denen beide Frequenzen zugleich auftreten. Beide Kopplungsschwingungen sind vorhanden, wenn durch Abriegelung des Gitters am Hauptrohr Stoßerregung über die Periode der Schwebungen hervorgerufen wird. Bei anomalem Verlauf der Rückkopplungskurve treten in der Nähe der kritischen Kopplung bei schwachen Rückkopplungsgraden langsame stabile Schwebungen auf.



Eigenfrequenzen einlagiger Spulen.

Von

W. Rogowski.

Herr K. W. Wagner nimmt auf Seite 238 Bezug auf die verdienstvolle Arbeit Kruithofs S. 71. Seine Bemerkungen befassen sich indessen nicht mit dem eigentlichen Ziel der Kruithofschen Arbeit, sondern mit den Eigenfrequenzen erster und zweiter Art. Da deren Einführung auf mich zurückgeht[1]), so richtet sich Herr Wagner mehr an mich als an Herrn Kruithof. Es sei mir daher folgende Zuschrift gestattet.

Herr Wagner meint, die Einteilung der Eigenfrequenzen in solche erster und zweiter Art sei nicht vollständig. Wer Freude an der Einführung neuer Bezeichnungen habe, möge z. B. von Eigenschwingungen dritter Art reden, wenn die Enden über eine Induktivität geschlossen sind; von Eigenfrequenzen vierter Art bei Verbindung der Enden über einen Kondensator.

Diese Einwände treffen indessen nicht das Wesentliche.

Die Eigenfrequenzen erster und zweiter Art sind von mir eingeführt worden, um das Verhalten eines Schwingungsgebildes beim Anschluß an eine Wechselstromquelle in den Hauptzügen zu kennzeichnen. Stimmt die Frequenz der Wechselstromquelle mit der Eigenfrequenz erster Art des Schwingungsgebildes überein, so läßt sich dieses für die Wechselstromquelle durch eine Parallelschaltung aus Induktivität und Kapazität ersetzen. Es schwingt in Stromresonanz. Seine Spannungen gehen nicht über die Spannungen der Wechselstromquelle hinaus.

Gibt man der Wechselstromquelle eine Frequenz, gleich der Eigenfrequenz zweiter Art des Schwingungsgebildes, so läßt sich dieses durch eine Hintereinanderschaltung von Induktivität und Kapazität ersetzen. Es schwingt in Spannungsresonanz. Seine Spannungen können die Maschinenspannungen weit übertreffen.

Gewiß stimmt die Eigenfrequenz erster Art mit der Eigenfrequenz des Schwingungsgebildes überein, wenn man dieses an der Stelle der Schwingungsknoten aufschneidet, und es decken sich die Eigenfrequenzen zweiter Art mit den Eigenfrequenzen des kurzgeschlossenen Schwingungsgebildes. Aber ihre Unterscheidung als besondere Frequenzen wird dadurch gerechtfertigt und notwendig, daß sie für das Verhalten einer Spule gegenüber einer Wechselspannung von ganz besonderer Wichtigkeit sind, wie dies in Übereinstimmung mit meinen theoretischen Betrachtungen die Versuche von Gothe und Ridder bewiesen haben (Archiv f. Elektrotechnik IX, S. 1; X, S. 339).

Hat ein Schwingungsgebilde seine Eigenfrequenzen erster Art bei $N_1, \ldots N_n$, seine Eigenfrequenzen zweiter Art bei $n_1 \ldots n_n$, und schalten wir dem Vorschlage des Herrn Wagner entsprechend in das Gebilde eine Induktivität ein, so ensteht ein neues Schwingungsgebilde. Tritt nun Strom- bzw. Spannungsresonanz bei neuen Frequenzen $N_1' \ldots N_n'$ und $n_1' \ldots n_n'$ ein, so werden wir jetzt die Frequenzen $N_1' \ldots N_n'$ als Eigenfrequenzen erster Art, die Frequenzen $n_1' \ldots n_n'$ als Eigenfrequenzen zweiter Art des neuen Schwingungsgebildes bezeichnen müssen.

Die Einteilung in Eigenfrequenzen erster und zweiter Art ist daher durchaus vollständig. Es liegt kein Bedürfnis nach Einführung von Eigenfrequenzen dritter, vierter und n ter Art vor.

[1]) W. Rogowski. Archiv für Elektrotechnik, VII, 17 und 240.

Berichtigung.

Im Artikel „Stabilität der Ölschicht bei Lagern" von Claudius Schenfer (XI. Band 1922, Seite 129—130) ist infolge eines Mißverständnisses der wichtigste Teil der Oszillogramme (Bild 2), nämlich die Kurve des Stromes, der durch die Ölschicht in ein Lager fließt, weggelassen worden. Cl. Schenfer.

Berichtigung.

In meiner Arbeit: Die Berechnung von eisenlosen Drosselspulen, S. 155 sind zwei sinnstörende Fehler stehen geblieben.

Auf Seite 167, Zeile 18 von oben, muß es heißen:

$$k' = \sqrt{1 - k^2} \qquad \text{statt} \qquad k = \sqrt{1 - k'^2}.$$

Seite 168, Zeile 5 von oben

$$2\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots 2n-3}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2n-2}\right)^2 \cdot \frac{2n-1}{2n} \qquad \text{statt} \qquad 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots 2n-3}{2\cdot 4\cdot 6 \ldots 2-2n} \cdot \frac{2n-1}{2n}.$$

H. Hemmeter.



Archiv für Elektrotechnik

Herausgegeben unter Beteiligung
des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins
von
Prof. Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen
Verlag von Julius Springer in Berlin

XI. Band | 20. Dezember 1922. | 7./12. Heft

Inhaltsverzeichnis. Seite

Das **Archiv für Elektrotechnik**

sieht seine Hauptaufgabe darin, allen in der Elektrotechnik wissenschaftlich arbeitenden Ingenieuren ein Sammelpunkt zu sein. Seine Arbeiten werden vorwiegend auf einem Gebiet liegen, in dem technische und physikalische Fragen ineinander übergehen. Das Archiv wird daher auch für alle auf dem Grenzgebiet zwischen Physik und Elektrotechnik tätigen Physiker von Interesse sein.

Das Archiv soll eine Ergänzung der „Elektrotechnischen Zeitschrift“ nach der wissenschaftlichen Seite hin bilden, zumal die „Elektrotechnische Zeitschrift“ infolge der Zusammensetzung ihres Leserkreises wirtschaftliche Fragen und beschreibende Aufsätze mehr als früher in den Vordergrund rücken muß.

Beiträge sowie sonstige für den Herausgeber bestimmte Mitteilungen werden erbeten unter der Adresse: Professor Dr.-Ing. W. Rogowski, Aachen, Elektrotechnisches Institut der Technischen Hochschule.

Das **„Archiv für Elektrotechnik“** erscheint vom Jahrgang 1923 (Band XII) ab in einzeln berechneten Heften, von denen 12 einen Band bilden. Der Preis eines Heftes wird sich nach dem Umfang desselben und den entstandenen Herstellungskosten richten.

Die Mitglieder des Verbandes Deutscher Elektrotechniker und des Elektrotechnischen Vereins, sowie die Bezieher der „Elektrotechnischen Zeitschrift“ erhalten auf den Bezugspreis einen Nachlaß von 25 %.

Der Bezug kann durch jede Buchhandlung, sowie durch die unterzeichnete Verlagsbuchhandlung erfolgen.

Verlagsbuchhandlung Julius Springer in Berlin W 9, Linkstr. 23/24.

Fernsprecher: Amt Kurfürst, 6050, 6053. — Drahtanschrift: Springerbuch-Berlin.

Reichsbank-Giro-Konto u. Deutsche Bank Berlin, Dep.-Kasse C.
Postscheck-Konten: für Bezug von Zeitschriften und einzelnen Heften: Berlin Nr. 20120 Julius Springer, Bezugsabteilung für Zeitschriften; für Anzeigen, Beilagen und Bücherbezug: Berlin Nr. 118935, Julius Springer.

Voranzeige.

In den nächsten Heften des Archivs für Elektrotechnik werden voraussichtlich folgende Arbeiten erscheinen:

Pl. Andronescu, Bestimmung des Streuungskoefizienten, sein Einfluß in der Wirkungsweise eines zweispuligen Wechselstrom-Transformators und die Bestimmung des Kreisdiagrammes.

W. Chrustschoff, Berechnung elektrischer Leitungsnetze unter der Bedingung eines Minimums an Material.

Dreyfus, Eigenschwingungen von Systemen mit periodisch veränderlicher Elastizität.

Grünewald, Durchschlagsfestigkeit von geschichteten Isoliermaterialien.

v. Kármán, Turbulenter Wärmeübergang.

Rogowski, Die elektrische Festigkeit am Rande des Plattenkondensators, ein Beitrag zur Theorie der Funkenstrecken und Durchführungen.

Cl. Schenfer, Messung der Reaktanzspannung bei der Kommutierung.

Schröter, Reinigung und Durchschlagfestigkeit des Transformatorenöls.

H. Stahl, Kann eine Gleichstrommaschine mit magnetischer Rückkopplung wirtschaftlich Hochfrequenzstrom erzeugen?

W. Tatarinow, Ungedämpfte Schwingungen der elektrostatisch gekoppelten Kreise und ihr mechanisches Modell.

Trefftz, Über Differenzengleichungen.


Digitized by Google

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz A. G., Würzburg.

